一个特殊图形的边色数

瞿晓鸿
(佛山科学技术学院 理学院, 广东 佛山 528000)

摘要: 从 Petersen图出发, 找到一个图形并证明其边色数为 7. 从说明 D. R. Fulkerson在 1971年提出的一个猜想是不成立的. 在此基础上, 还进一步证明了该猜想成立的一些充分条件.

关键词: 正则图; 边色数; Petersen图
中图分类号: O157. 6 文献标识码: A 文章编号: 1007- 855X(2006) 02- 0118- 03

Opposite Example of a Supposition

QU Xiao-hong
(Faculty of Science, Foshan University, Foshan, Guangdong 528000, China)

Abstract A special graph is formed from Petersen graph and its edge chromatics number is turned out to be 7. The graph is used to show Fulkerson's supposition wrong. And furthermore some full conditions about the supposition are proved.

Key words regular graphs; edge chromatics number; Petersen graph

0 引 言

我们仅考虑简单图, 用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示图 G 的顶点集和边集. 所谓边着色是指对图 G 的边进行着色, 且使相邻的两条边没有相同的颜色. 一个 $n-$ 边着色是用 n 种颜色的一个着色. 边色数 $x'(G)$ 是指使 G 是 $n-$ 边着色的 n 的最小值. 图 G 的顶点 v 称为割点, 如果 $E(G)$ 可以分为两个非空子集 E_1 和 E_2, 使得 $G(E_1)$ 和 $G(E_2)$ 恰好有公共点 v. 没有割点的非平凡的连通图称为不可分图, 图的一个最大的不可分子图称为图 G 的一个块, 若图 G 是一个不可分的, 则 G 本身就称为一个块.

Fulkeson D R 于 1971年提出的一个猜想[1], 就是"若 G 是 3正则简单块, 而 H 是重复 G 中的各条边得到的图, 则 $x'(H) = 6$". 据笔者所了解的情况, 有关这个猜想尚无任何结论.

本文由 Petersen图出发, 重复其各条边得到图 H, 并证明 $x'(H) = 7$. 从而说明 Fulkersen的这一猜想并不是总是成立的. 本文进一步证明了该猜想成立的一些充分条件.

1 预备知识

引理 1[2] 设图 G 是简单图, 则 $x'(H) = \Delta$ 或 $\Delta + 1$.

引理 2 图 G 中所有顶点的度的和等于边数的 2倍, 即

$$\sum_{v\in V(G)} d(v) = 2q \quad (其中\ q = |E(G)|)$$

如果图 G 是 3正则图, 即 $d(v) = 3$, $v\in V(G)$, 由引理 2, 知 $\sum_{v\in V(G)} d(v) = 2|E(G)|$ 必需是偶数, 故 $|V(G)|$ 必定为偶数. 故图 G 的顶点数是偶数. 所以, 本文只就偶数个顶点的 3正则简单块进行讨论.

2 反例及一些充分条件

2.1 反例

Fulkerson的猜想是不正确的.

收稿日期: 2005- 06- 06.
作者简介: 瞿晓鸿 (1963. 12~), 女, 副教授. 主要研究方向: 图论.

首先考察 Petersen图 (图 1). 并已经知道其边色数 $x'(G) = 4$[3], 且 Petersen图也是 3正则简单块.

设图 H 是重复 Petersen图中的各条边得到的, 下面证明其边色数 $x'(G) = 7$.

事实上, 由于 H 是 6 - 正则图 (不是简单图), 故 $x'(G) \geqslant 6$ 图 H 可以用 7种颜色着色, 为方便起见, 用数字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7表示不同的 7种颜色 (图 2). 所以, $6 \leqslant x'(H) \leqslant 7$.

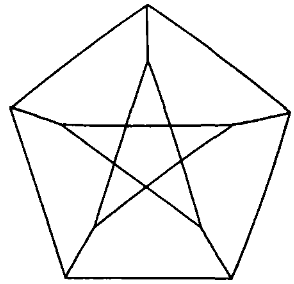


图1　Petersen图

Fig.1　Petersen graph

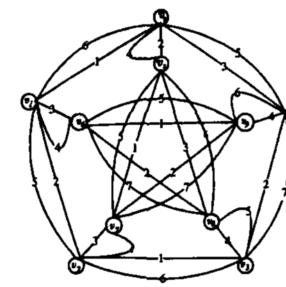


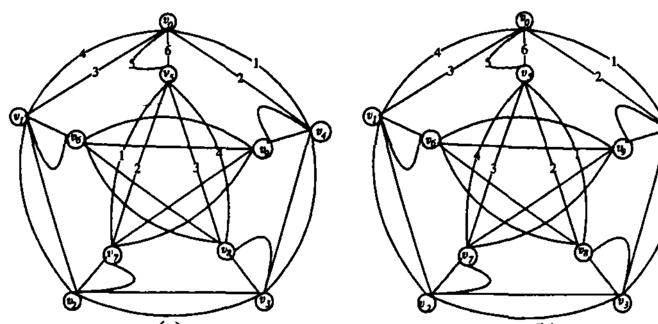
图2　H图的7-边着色

Fig.2　7-Edge colouring of H graph

现在证明 $x'(H) = 7$. 用反证法, 设 $x'(H) = 6$ 也就是说对于图H, 存在一种 6 - 边着色的方法. 其 6种颜色分别用数字 1, 2, 3, 4, 5, 6表示. 首先考察图 H 中的圈 $v_0v_1v_2v_3v_4v_0$ (重圈), 由于每两个顶点之间有重边, 且该圈顶点个数是 5为奇数, 故必需用至少 6种颜色才能将圈 $v_0v_1v_2v_3v_4v_0$ 着色. 从而, 用完颜色 1 ~ 6

同理, H 中的圈 $v_0v_1v_2v_3v_4v_0$ 也必须用至少 6种颜色才能完成上色. 因此, 也用完颜色 1 ~ 6

现考察 v_0 与 v_5 之间的边的着色. 如果与 v_0 关联的已经着色的 4条边的颜色和与 v_5 关联的已经着色的 4条边的颜色不完全相同, 例如, 与 v_0 关联的 4条边的颜色不妨设为 1, 2, 3, 4 而与 v_5 关联的 4条边的颜色不妨设为 1, 2, 4, 5. 那么, 两重边 v_0v_5, 一条只能用颜色 6, 另一条必需用新的颜色, 所以, 从而导致 $x'(H) > 6$, 与假设矛盾! 所以, 与 v_0 关联的已经着色的 4条边的颜色和与 v_5 关联的已经着色的 4条边的颜色必须完全相同. 不失一般性, 不妨设它们用颜色 1, 2, 3, 4着色, 从而 v_0v_5 的两条边正好用颜色 5, 6着色. (图 3分 (a)、(b) 两种情况).



(a)　　(b)

图3　双重边v_1v_2的两种着色方式

Fig.3　Two colourings of two double edge v_1v_2

同理可得, v_1 和 v_6, v_2 和 v_7, v_3 和 v_8 及 v_4 和 v_9, 它们已经着色的 4条边所使用的颜色分别各自对应相同.

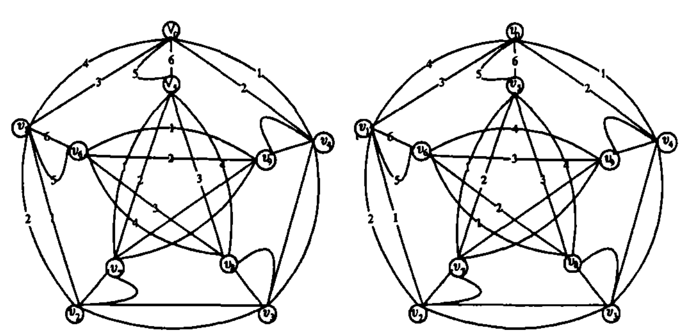
需要说明的是, 相邻两点间的重边只需知道是用哪两种颜色即可, 不必细知这两种颜色如何分配. 例如 v_0 与 v_5 之间有两条重边, 我们使用了颜色 5, 6着色, 但哪一条用颜色 5或是 6其性质都是一样的.

现考虑圈 $v_0v_1v_2v_3v_4v_0$ 中与顶点 v_2 关联的 4条边的着色. 先观察图 3(a) 中的情况.

1) 当 v_1v_2 两个重边着颜色 1, 2时, 则在圈中 $v_5v_6v_7v_8v_9v_5$ 中与 v_6 关联的 4条边也必须着颜色 1, 2, 3, 4 从而 v_1v_6 两重边应该着颜色 5, 6 (分两种方式着色, 如图 4中 (a), (b) 所示).

(1) 对于图 4(a) 中情况, 由于在圈 $v_5v_6v_7v_8v_9v_5$ 中与 v_8 关联的 4条边颜色均用 3, 4 因此, 此着色方式不行;

(2) 对于图 4(b) 中情况, 由于在圈 $v_5v_6v_7v_8v_9v_5$ 中与 v_8 关联的 4条边着色 1, 2, 3, 4 故在圈 $v_0v_1v_2v_3v_4v_0$ 中与顶点 v_3 关联的 4条边也必须着颜色 1, 2, 3, 4 但是, 这将导致该圈上相邻两边同色, 因此, 该着色方式不行.



(a)　　(b)

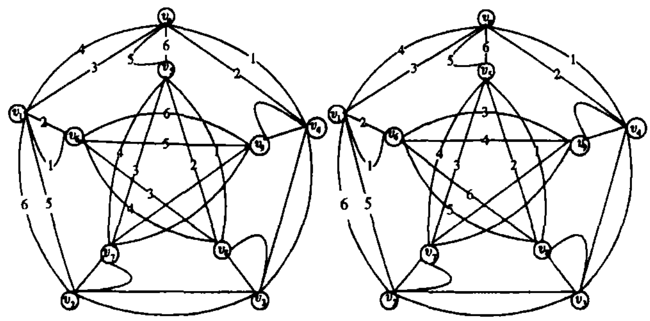
图4　双重边v_1v_2和双重边v_6v_7着色1,2,3,4

Fig.4　Colouring 1,2,3,4 of two double edges v_1v_2 and double edges v_6v_7

其次, 考虑图 3中 (b) 情况.

2) 当 v_1v_2 两个重边着颜色 5, 6时, 则在圈 $v_5v_6v_7v_8v_9v_5$ 中与 v_6 关联的 4条边也必须着颜色 3, 4, 5, 6 从而 v_1v_6 两重边也应着颜色 1, 2 (如图 5中 (a) 及 (b) 两种情况).

(1) 在图 5(a)中, 由于在圈 $v_5v_6v_7v_8v_9v_5$ 中与 v_8 关联的 4条边着颜色 1, 2, 3, 4. 故在圈 $v_0v_1v_2v_3v_4v_0$ 中与顶点 v_3 关联的 4条边也必须着颜色 1, 2, 3, 4(图 6). 从而 v_3v_8 双重边只能上颜色 5, 6. 于是, 在圈 $v_0v_1v_2v_3v_4v_0$ 中与顶点 v_2 关联的 4条边的颜色是 1, 2, 5, 6. 但在圈 $v_5v_6v_7v_8v_9v_5$ 中与 v_7 关联的 4条边不可能着颜色 1, 2, 5, 6. 故此着色方式不行; (2) 在图 5(b)中, 由于在圈 $v_5v_6v_7v_8v_9v_5$ 中与 v_8 关联的 4条边的颜色为 1, 2, 5, 6. 从而在圈 $v_0v_1v_2v_3v_4v_0$ 中与顶点 v_3 关联的 4条边也必须着颜色 1, 2, 5, 6(图 7). 于是 v_3v_8 双重边刚好上颜色 3, 4. 由于在圈 $v_0v_1v_2v_3v_4v_0$ 中与顶点 v_2 关联的 4条边的颜色为 1, 2, 5, 6, 这必然和在圈 $v_5v_6v_7v_8v_9v_5$ 中与 v_7 关联的 4条边的颜色不同, 这与前面推导的结果相矛盾! 所以, 此种着色方式失效.



(a) (b)

图5 双重边v_6v_8和双重边v_6v_9着色3,4,5,6

Fig.5 Colouring3,4,5,6 of two double edges v_6v_8 and two double edges v_6v_9

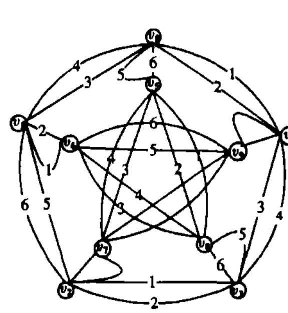


图6 $v_0v_1v_2v_3v_4v_0$中与v_3关联的四边颜色是1,2,3,4

Fig.6 Colouring 1,2,3,4,to four edges relation With v_3 in $v_0v_1v_2v_3v_4v_0$

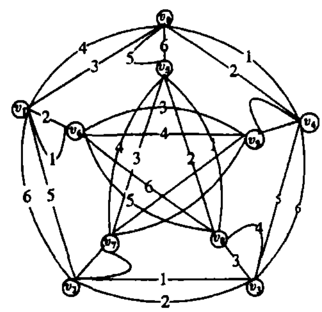


图7 $v_0v_1v_2v_3v_4v_0$中与v_3关联的四边颜色是1,2,5,6

Fig.7 Colouring 1,2,5,6,to four edges relation With v_3 in $v_0v_1v_2v_3v_4v_0$

综上所述, 如果用 6种颜色给图 H 的各边上色, 是不可能 6-边着色的, 即 $x'(H) \geqslant 7$.

所以 $x'(H) \geqslant 7$.

2.2 猜想成立的一些充分条件

定理 1 设 3正则简单块 G 的 $x'(G) = 3$, 而图 H 是重复图 G 的各条边而得到的图, 则 $x'(H) = 6$.

证明 因为 $x'(G) = 3$. 不妨设使用的颜色是 1, 2, 3. 图 H 是重复图 G 的各条边而得到的图, 故图 $H-G$ 与图 G 完全相同. 所以用另外 3种颜色 4, 5, 6可将图 $H-G$ 的边 3-边着色. 从而, 图 H 可 6-边着色.

所以 $x'(H) \leq 6$.

另一方面, $d(v) = 6$, $v \in V(G)$, 故 $x'(H) \geqslant 6$.

综上所述, $x'(H) = 6$.

定理 2 如果 3正则简单块 G 是 Hamilton圈, 而图 H 是重复图 G 的各条边而得到的图, 则 $x'(H) = 6$.

证明 由图 G 的条件知

$$3 \leqslant x'(G) \leqslant 4,$$

但可以证明, 图 G 可 3-边着色. 由于 $|V(G)|$ 为偶数, 故对于 G 中的 Hamilton圈只需用两种颜色即可. 剩下的边用第三种颜色着色, 即图 G 可 3-边着色, 所以

$$3 \leqslant x'(G).$$

综上所述, $x'(H) \geqslant 6$.

参考文献:

[1] J. A. 邦迪, U. S. R. 默蒂. 图论及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 1987. 266.

[2] 张克民, 林国宁, 张忠辅. 图论及其应用习题解答 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1993. 145-146.

[3] 王朝瑞. 图论 [M]. 北京: 北京工业学院出版社, 1989. 171.

[4] 杨炳儒. 图论概要 [M]. 天津: 天津科学技术出版社, 1990. 106.