

doi: 10.3969/j.issn.1007-855x.2011.02.010

一种求解 N 皇后问题的优化组合遗传算法

黄复贤

(菏泽学院 计算机与信息工程系, 山东 菏泽 274006)

摘要: 基于遗传算子优化组合思想, 采用二进制编码方式, 选择矩阵遗传算子和布尔遗传算子组合应用对 N 皇后问题求解, 避免了常规遗传算法的杂交率和变异率选取. 从 N 皇后问题的约束条件角度, 构造适应度评价函数, 保证了算法的全局收敛性. 实验结果表明, 本文算法具有良好的搜索效率和求解质量, 运行一次在收敛代数内可以搜索到多个解, 当皇后数 N 较大时, 搜索到解的效率越明显好于常规遗传算法.

关键词: N 皇后问题; 矩阵遗传算子; 布尔遗传算子; 优化组合

中图分类号: TP301.6 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-855X(2011)02-0046-04

An Optimized and Combined Genetic Algorithm for N -Queens Problem

HUANG Fu-xian

(College of Computer and Information Engineering, Heze University, Heze, Shandong 274006, China)

Abstract: Based on the concept of optimized combination of genetic operators, in this paper a new genetic algorithm using binary code for N -Queens problem is constructed with matrix genetic operator and Boolean genetic operator, which does not require parameters of crossover probability and mutation probability. A fitness function is designed to adapt constraint of N -Queens problem and to ensure the convergence of the constructed genetic algorithm. Experiments results show that the efficiency of the algorithm is better than current genetic algorithm when the number of queens is great, and it can find multiple solutions in one search process.

Key words: N -Queens problem; matrix genetic operator; Boolean genetic operator; optimized combination

0 引言

N 皇后问题是一个 NP 难问题, 描述为: 在 $N \times N$ 格的棋盘上放置 N 个皇后, 任意给定两个皇后, 满足它们均不在同一行、同一列或同一斜线上. 回溯算法是求解 N 皇后问题的经典算法, 在系统搜索所有解的空间树中找到满足要求的解, 其搜索时间随着问题规模的增大而呈几何指数增长, 时间复杂度为 $O(n!)$, 其中 n 为皇后个数^[1], 因为在求解 N 皇后问题的任何一个解时, 每个皇后在棋盘上的位置无任何规律, 不具有系统性, 属于随机放置的. 遗传算法是一种基于生物进化原理的全局搜索算法, 具有简单、通用、鲁棒性强和适于并行处理等优点, 被成功广泛应用于求解一些 NP 完全问题, 为求解 N 皇后问题提供了另外一种求解思路. 但是, 研究表明遗传算法搜索性能受到各种随机因素的影响, 如编码方案、初始种群、杂交率与变异率等参数的选取等^[2-3]. 例如, 文献[4]中采用二维二进制染色体编码方案, 导致了算法搜索空间过大, 影响了算法搜索效率; 文献[5]中采用自然数串编码, 在简单遗传算法中增加依次交换染色体基因位的局部搜索策略, 提高了算法的收敛性, 但是每次仅能求得一个有效解. 文献[6]从遗传算子优化组合应用的角度, 以矩阵遗传算子和布尔遗传

收稿日期: 2010-09-15. 基金项目: 山东省自然科学基金(Y2008A16); 菏泽学院科研基金资助(XY10JS01).

作者简介: 复贤(1972-), 男, 硕士, 副教授. 主要研究方向: 软件工程、人工智能等.

E-mail: hfxhzu@163.com

算子为基础,构造了一种新型遗传算法,可以避免常规遗传算法的杂交率和变异率选取,具有简洁和高效的特点.受此启发,本文采用二进制编码方式,选择矩阵遗传算子和布尔遗传算子组合应用对 N 皇后问题求解.从 N 皇后问题的约束条件角度,构造适应度评价函数,保证了算法的全局收敛性.实验结果表明,当皇后数 N 较大时,本文优化组合遗传算法运行一次在收敛代数内可以搜索到多个解,且搜索到解的效率好于常规遗传算法.

1 两种新型遗传算子

文献[6]研究表明,矩阵遗传算子具有较强的全局搜索性能,布尔遗传算子是一种强局部搜索策略.

假设染色体二进制编码长度为 n ,矩阵遗传算子算法描述:

步骤1:按照某种方法选取 n 个染色体,并将它们随机存储在矩阵 $A_{n \times n}$ 的各行中;

步骤2: $A_{n \times n}$ 进行转置得到矩阵 A^T ,将 A^T 的每行基因,顺序重新构成新的 n 个染色体;

步骤3:依据适应度函数值,从 n 个原染色体与生成的 n 个新染色体中,选择出较优秀的 n 个染色体,参与下代的遗传迭代.

假设二进制编码长度为 n 的染色体 $s = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1} \alpha_n$,布尔遗传算子算法描述:

步骤1:染色体集合初始化 $A = \{S\}$;

步骤2:任取染色体 $s \in A$,按照编码顺序取 s 的基因 a_i , $c_j = a_i \oplus a_j$,其中 $j = (i + 1) \bmod n$,将 c_i 与 a_i 一一对应组成染色体 $c = c_1 c_2 \cdots c_{n-1} c_n$,若 $c \notin A$,则 $A = A \cup \{c\}$;直到 A 为闭集;

步骤3:对于 A 中每个染色体 $s = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1} \alpha_n$,进行基因序列反序,得到 s 的逆序基因组 $s' = \alpha_n \alpha_{n-1} \cdots \alpha_2 \alpha_1$,如果 s' 的适应度优于 s ,则 s' 替代 s ,否则 s' 被淘汰.

步骤4:依次对 A 中的每染色体 $s = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1} \alpha_n$,将 s 的每个基因 α 被其一个等位的基因 β 进行替代,得到新基因组 $s' = \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_{n-1} \beta_n$,如果 s' 比 s 优秀,那么在 A 中 s 被 s' 替代.

矩阵遗传算子与常规算子的遗传运算方式相比,具有更强的全局搜索能力.布尔遗传算子对染色体所代表的每个样本空间进行“开发”,是一种强局部搜索策略.将这两种新型算子组合应用,可以避免传统遗传算法中杂交率和变异率的参数选取,同样使得构造的遗传算法高效和简洁.这正是本文选用这两种遗传算子来构造求解 N 皇后问题的遗传算法的原因所在.

2 优化组合遗传算法

2.1 编码

二进制串编码能够将搜索空间进行精细描述,而且可以为矩阵遗传算子与布尔遗传算子的优良性能发挥提供好的“用武之地”,从而使构造的遗传算法有较高的搜索效率,因此,选用二进制编码方案.设问题中皇后个数为 N ,求取整数 k ,使得 $2^{k-1} \leq N - 1 \leq 2^k$,那么第 i ($1 \leq i \leq N$) 个皇后所在行(列)标 a_i 在染色体中均用 k 位二进制串表示,因此,染色体为 $(N \cdot k)$ 位二进制编码串.

本文对染色体自身的信息进行充分应用,保证每个皇后均不在同一行的约束条件.任意给定染色体 $C = C_0 C_1 \cdots C_{n \cdot k - 2} C_{n \cdot k - 1}$ 为 $(N \cdot k)$ 位二进制串,按照从左到右的顺序,对 $C = C_0 C_1 \cdots C_{n \cdot k - 2} C_{n \cdot k - 1}$ 每 k 位二进制串 $C_i = C_i C_{i+1} \cdots C_{i+k-2} C_{i+k-1}$ 译成自然数 b_i ,表示编号为 i 的皇后放置在 $N \times N$ 格的棋盘的第 i 行的第 b_i 列.

以皇后个数 $N = 4$ 为例,一个染色体编码为: $C = 001\ 011\ 000\ 010$,每个皇后所在的列号用3位二进制串表示,编号为0、1、2和3的四个皇后所在的列号二进制串依次为001、011、000、010,该染色体所表示的4个皇后放置分别为:0行1列、1行3列、2行0列和3行2列.

如果皇后放置的列号 $b_i \geq N$,表示染色体 C 所表示的编号为 i 的皇后无法放置在规定的棋盘内,该染色体 C 为“非法”染色体,需要对 $C_i = C_i C_{i+1} \cdots C_{i+k-2} C_{i+k-1}$ 段基因进行修正,其修正步骤为:

- 1) 将 b_i 对 N 进行取模运算,即 $d_i = b_i \% N$;
- 2) 对 d_i 用 k 位二进制串 D_i 表示,即 $D_i = D_0 D_1 \cdots D_{k-2} D_{k-1}$;
- 3) 将染色体 C 中表示 b_i 的基因段 $C_i = C_i C_{i+1} \cdots C_{i+k-2} C_{i+k-1}$,被表示 d_i 的 k 位二进制串 $D_i =$

$D_0 D_1 \cdots D_{k-2} D_{k-1}$ 所替代.

2.2 适应度函数

根据 N 皇后问题描述, 本文 2.1 节提出的编码方案, 解决了皇后间的行约束. 适应度函数构造满足皇后间不在同一列且不在同一斜线上的两个约束条件. 适应度值低的个体违反约束较少, 被认为是较优个体.

给定本文所采用的二进制编码的染色体, 按照从左至右的顺序, 依次分成 N 个 k 位二进制串, 任意取其中的第 i 个和第 j 个的 k 位二进制串, 分别译成自然数 a_i 和 a_j , 表示在第 i 行的 a_i 列、第 j 行的 a_j 列分别放置皇后. 如果 $a_i - a_j = 0$, 则表示两个皇后放置于同一列, 违反列的约束条件. 此外, 由文献 [5] 和文献 [7] 的分析表明, 只要当 $|i - j| = |a_i - a_j|$ 成立, 则表明被放置的两个皇后位于同一斜线上, 违反斜线约束条件; 由于本文的编码方案保证了各个皇后均不在同行, 即 $|i - j| \neq 0$, 因此, 采用本文编码的染色体, 对于任取其所表示的两个皇后位置, 最多只能违反一种约束条件, 即: 不可能同时既违反列约束又违反斜线约束. 由此适应度函数设计如下:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } |i - j| = |a_i - a_j|; \\ 1 & \text{if } a_i - a_j = 0; \\ 0 & \text{其它;} \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{令} \quad \min f_x = \sum_{i=0}^{N-2} \sum_{j=i+1}^{N-1} x_{ij} \quad (2)$$

因此, 所有满足 $f_x = 0$ 取得最小值的“合法”染色体为 N 皇后问题的解. 式(2)所构造的适应度函数比文献 [5] 的适应度函数简洁、高效, 避免了皇后间冲突的重复计算.

2.3 算法描述及收敛性

采用二进制编码, 基于矩阵与布尔算子求解 N 皇后问题的优化组合遗传算法 (MBC_GA) 流程描述如下:

- 1) 根据求解问题规模 N , 求取编码长度参数 k , 使得 $2^{k-1} \leq N - 1 \leq 2^k$;
- 2) 随机生成二进制编码长度为 $N \cdot k$ 的初始化种群, 并初始化最优解集 $S = \varphi$;
- 3) 应用排序选择与染色体编码长度相等的染色体数, 选用矩阵遗传算子进行搜索, 并对“非法”染色体进行修正, 得到 n 个新染色体;
- 4) 对于新的 n 个染色体, 应用布尔遗传算子进行局部搜索, 并进行“非法”染色体修正, 分别计算染色体的适应度, 如果 $f(P) = 0, P \notin S$, 那么 $S = S \cup \{P\}$;
- 5) 如果满足遗传终止条件, 则输出最终解 S , 否则转向 3);
- 6) 输出各个有效解.

当皇后数 N 较大时, 如果仍然采用将二进制编码, 难免使得染色编码较长, 实验结果表明, 在应用布尔遗传算子运算时, 对解的空间搜索开销稍大, 由此, 对算法应用进行扩展, 使其具有更广的适用对象.

对于皇后数 N 较大的情况, 可以选用四进制、八进制等其它 K 进制形式编码, 相应的编码长度缩短为 $N \lfloor \log_K^N \rfloor$, 而布尔遗传算子中的异或运算由与其相邻基因求和取模等运算来替代, 也可以根据基因特征构造该编码下的“异或”操作, 保证操作运算后, 对被操作的基因达到变异效果.

下面对本文求解算法的全局收敛性进行证明.

定理: 设皇后问题规模为 N , 若遗传种群初始规模大于 $2N \lfloor \log_2^N \rfloor$ 时, MBC_GA 算法收敛.

证明: 文献 [6] 对两种新型遗传算子的研究结果表明, 矩阵遗传算子等同于“矩阵”式杂交; 布尔遗传算子等效于“布尔遗传”式变异. 设皇后问题规模为 N , 那么染色体的二进制编码长度为 $N \lfloor \log_2^N \rfloor$, 如果种群规模大于 $2N \lfloor \log_2^N \rfloor$ 时, 使得“矩阵遗传”式杂交概率 $P_c \in (0, 1)$, 且“布尔遗传”式变异概率 $p_m \in (0, 1)$. 由算法流程可知, 算法应用了选择排序. 又因为变异率 $p_m \in (0, 1)$, 交叉率 $P_c \in (0, 1)$, 采用排序选择和局部搜索, 遗传算法可收敛至最优解^[3]. 故 MBC_GA 算法收敛.

3 实验结果及分析

应用 Java 语言编程对 MBC_GA 算法进行实现, 分别对 8、10、15、20、25 个皇后问题进行求解, 构成五组实验. 采用 CPU 为双 Intel 内核 2.0G, 内存 1G 的 PC 机上进行实验. 种群规模设为 400, 为了兼顾算法效率, 皇后数为 8、10 和 15 的求解采用二进制编码, 皇后数为 20 和 25 的问题采用八进制编码, 其中布尔运算采用相邻基因求和取模的方式, 遗传终止代数设为 1000 代, 求取 MBC_GA 算法搜索到有效解的个数. 五组实验各自运行 100 次, 随机抽取每组 20 次的实验结果, 求取各自平均值, 搜索到解的个数统计结果如表 1 所示.

表 1 统计结果表明, MBC_GA 算法当皇后数目较大时, 采用 K 进制编码是有效性的, 即算法具有良好的应用扩展性. 且本文算法运行一次在收敛代数内可以搜索到多个解.

为了验证算法效率, 在上述实验环境下, 将 MBC_GA 算法与文献 [8] 的遗传算法对各个皇后问题搜索到第一个有效解所需的时间进行对比, 实验进行 100 次, 同样随机抽取各自 20 次的实验结果, 并求取平均值, 统计结果如表 2 所示.

文献 [8] 算法求解皇后数 25 的问题时, 时间开销太大, 因此, 本文对其没有给出具体时间数字统计. 对于皇后数不大于 10 的情况, 由于 MBC_GA 算法中两种新型遗

传算子运算消耗, 搜索至第一个有效解的效率略低于文献 [8] 算法, 但当皇后数较大时, 本文算法搜索到解的效率远远高于文献 [8] 的遗传算法, 这是因为本文选用的两种新型遗传算子具有良好的搜索性能敏捷地“捕获”有效解.

4 结论

N 皇后问题求解是经典 NP 问题, 研究如何对其高效求解有着重要的意义. 本文在文献 [6] 优化组合遗传算法研究基础之上, 将矩阵遗传算子和布尔遗传算子组合应用, 采用二进制编码方案, 构造了一种对 N 皇后问题进行求解的优化组合遗传算法, 避免常规遗传算法中的交叉概率和变异概率等敏感参数的选取. 从分析 N 皇后的约束条件入手, 精心设计适应度函数, 保证了算法的全局收敛性, 并且从编码方案的改进方面提出了对算法的扩展应用思路. 对比实验结果表明, 该求解方法具有较好的求解质量和效率, 当皇后数 N 较大时, 本文优化组合遗传算法运行一次在收敛代数内可以搜索到多个解, 且搜索到解的效率好于常规遗传算法.

参考文献:

- [1] 张万军. N 皇后问题回溯算法探讨 [J]. 宜宾学院学报, 2006, 6(6): 64-66.
- [2] 岳颖, 冯珊. 遗传算法的计算性能的统计分析 [J]. 计算机学报, 2009, 32(12): 2389-2392.
- [3] 帅训波, 马书南. 基于逆序与对偶组合算子的小生境遗传算法 [J]. 昆明理工大学学报, 2009, 34(3): 34-38.
- [4] 谷峰, 吴勇, 唐俊. 基于遗传算法的 N 皇后问题求解 [J]. 宿州教育学院学报, 2002, 5(4): 74-75.
- [5] 刘娟, 欧阳建权, 陈良军. 用混合遗传算法求解 N 皇后问题 [J]. 湘潭大学自然科学学报, 2007, 29(2): 37-41.
- [6] 帅训波, 马书南, 邵艳伟, 等. 基于两种新型遗传算子的优化组合遗传算法 [J]. 计算机系统应用, 2010, 19(7): 98-102.
- [7] 吴兆福, 潘清芳. 一个求解 N 皇后问题的演化策略 [J]. 江汉石油学院学报, 2002, 24(3): 111-112.
- [8] 李鸿. 解决 N -皇后问题的一个遗传算法 [J]. 宿州师专学报, 2000, 15(4): 85-87.

表 1 对 N 皇后问题的搜索结果统计

Tab. 1 Search result of MBC_GA for N -Queens problem

皇后数	8	10	15	20	25
MBC_GA 算法	26.5	12.05	13.5	4.35	2.75

表 2 搜索时间对比

单位: s

Tab. 2 Comparison of search efficiency

Unit: s

皇后数	8	10	15	20	25
MBC_GA 算法	0.928	1.562	3.476	4.863	5.782
文献 [8] 算法	0.369	0.784	195.283	604.335	-