一类具有时滞的病毒模型的 Hopf 分支

徐昌进
(昆明理工大学 理学院,云南 昆明 650093)

摘要: 对一类具有时滞的病毒模型进行分析,得到了该模型全时滞稳定的充分且必要条件,这些都是简明的代数判定,同时,还给出了 Hopf 分支存在的条件.

关键词: 病毒模型; 全时滞稳定性;代数判定;Hopf 分支
中图分类号:0192　　文献标识码:A　　文章编号:1007- 855X(2005)01- 0115- 03

Hopf Bifurcation of a Viral Model with Delay

XU Chang-jin
(Faculty of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, China)

Abstract: After an analysis on a viral model with delays, the sufficient and necessary conditions of the complete delay stability are achieved, which are brief and practical algebraic criteria. Furthermore, the conditions of the existence of Hopf bifurcation are obtained.

Key words: viral model; complete delay stability; algebraic criterion; Hopf bifurcation

0 引 言

在生物体内存在着大量的病毒, 同时, 也存在着许多的抗病毒的细胞. 因此, 病毒与抗病毒的细胞的相互作用过程成为目前研究的焦点. 通过最近发展起来的软件包, 利用数值分析的方法, 分析了鼠科的绒毛膜尿囊病毒与抗病毒的T淋巴细胞的相互作用过程[1]. 得到了: (1) 在鼠科中, 低水平绒毛膜尿囊病毒数量与抗病毒T淋巴细胞数量的转化的必要条件; (2) 在病毒低水平持续存在的情况下, 抗病毒的T淋巴细胞的存在数量; (3) 指出了低水平的病毒与抗病毒T淋巴细胞的共存是可能的.

1 引 理

文中研究三阶的病毒模型[1]

$$\begin{cases} \dfrac{dV(t)}{dt} = \beta V(t) - \gamma_{VE} E_e(t) V(t) \\ \dfrac{dE_p(t)}{dt} = \alpha_{EP}(E_P^0 - E_p(t)) + b_P V_{(t)} E_p(t-\tau) \\ \dfrac{dE_e(t)}{dt} = b_d V(t) E_p(t-\tau) - \alpha_{E_e} E_e(t) \end{cases} \tag{1}$$

其中参数 β, γ_{VE}, α_{EP}, E_P^0, b_p, b_d, α_{Ee} 均为大于0的常数. β 为病毒的繁殖率; γ_{V_E} 为病毒的消亡率; E_P^0 为绒毛膜尿囊病毒与抗病毒的T淋巴细胞的平衡浓度; b_p, b_d 分别为激活的抗病毒的T淋巴细胞的比率和分化抗病毒的T淋巴细胞的比率; V 为一种特定的病毒数量; E_p 为抗病毒的T淋巴细胞的预兆因子数量; E_e 为抗病毒的T淋巴细胞的效应器数量; α_{EP} 为抗病毒的T淋巴细胞的预兆因子导致的自然死亡率.

记 $x(t) = V(t)$, $y(t) = E_p(t)$, $z(t) = E_e(t)$, $a = \beta$, $b = \gamma_{VE}$, $c = \alpha_{EP}$, $m = b_p$, $n = b_d$, $l =$

收稿日期: 2003- 12- 15.
第一作者简介: 徐昌进(1970~), 男, 在读硕士研究生. 主要研究方向: 动力系统、分支与混沌.

α_{Ee}, 则(1) 化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=ax(t)-bz(t)x(t)\\ \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=c(k-y(t))+mx(t)y(t-\tau)\\ \dfrac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}=nx(t)y(t-\tau)-lz\end{cases}\tag{2}$$

定义 1 考虑方程 $\dot{x}(t)=f(t,x(t)),x(t-\tau))$ 若对 $\forall\tau\geq 0$ 方程的零解都是渐近稳定的, 则其零解称为全时滞稳定的.

对给定的定常时滞系统

$$\frac{\mathrm{d}x_s(t)}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{n}(a_{sj}x_j(t)+b_{sj}x_j(t-\tau)),\ \tau\geq 0,(s=1,2\cdots,n).\tag{3}$$

特征方程记为 $\Delta(\lambda,\tau)=\det|a_{sj}+b_{sj}e^{-\tau\lambda}-\delta_{sj}\lambda|=0$.

引理 系统(3) 零解为全时滞稳定的充要条件是

(i) $\Delta(\lambda,0)\equiv\det|a_{sj}+b_{sj}-\delta_{sj}\lambda|=0$ 的根的实部均为负数.

(ii) 当 $\forall y,\tau\in R,\tau\geq 0$ 当, $\Delta(iy,\tau)=|a_{sj}+b_{sj}e^{-\tau iy}-\delta_{sj}(ij)|\neq 0$ 时, 同时成立.

2 主要结果

2.1 系统的正平衡点全时滞稳定的充要条件

系统(2) 有两个奇点 $A_1(0,K,0)$, $A_2(x_0,y_0,z_0)$. 其中

$$x_0=\frac{acl}{mal+bckn},\ y_0=\frac{mal+bckn}{bcn},\ z_0=\frac{a}{b}.$$

对于 $A_1(0,k,0)$, (2) 的线性化系统为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=ax(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=mkx(t)-cy(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}=nkx(t)-lz(t).\end{cases}$$

其特征方程为$(\lambda-a)(\lambda+c)(\lambda+1)=0$, 特征根为 $\lambda_1=a$, $\lambda_2=-c$, $\lambda_3=-l$. 所以 $A_k(0,k,0)$ 是不稳定的.

下面讨论正平衡点 A_2 的稳定性.

定理 1 系统(2) 在 $A_2(x_0,y_0,z_0)$ 全时滞稳定的充要条件是:

(a) $A>0$, $AB-C>0$, $BC>0$; (b) $D>0$, $DE-F>0$, $EF>0$ 同时成立.

其中 $A+l+c-mx_0$, $B=cl+bnx_0y_0-mx_0l$, $C=bcnx_0y_0$,

$D=2(cl+bnx_0y_0)-m^2x_0^2-(c+l)^2$, $E=(bnx_0y_0)^2-2bcnx_0y_0(c+l)-(mx_0l)^2$

$F=(bcnx_0y_0)^2$.

证明 对于 $A_2(x_0,y_0z_0)$, 的线性化系统为 $X(t)=PX(t)+QX(t-\tau)$, $\tau>0$

$$\text{其中}\ P=\begin{pmatrix}0&0&-bx_0\\ my_0&-c&0\\ ny_0&0&-\lambda\end{pmatrix},\ Q=\begin{pmatrix}0&0&0\\ 0&mx_0&0\\ 0&nx_0&0\end{pmatrix}.$$

特征方程为 $\Delta(\lambda,\tau)=\lambda(\lambda+1)(mx_0e^{-\lambda\tau}-c-\lambda)-(\lambda+c)bnx_0y_0=0$. (4)

下证引理(i)(ii) 满足. 当 $\tau=0$ 时,

$$\Delta(\lambda,0)=\lambda(\lambda+1)(mx_0-c-\lambda)-(\lambda+c)bnx_0y_0=0.$$

整理得

$$\lambda^3+(l+c-mx_0)\lambda^2+(cl+bnx_0y_0-mx_0l)\lambda-bcnx_0y_0=0.$$

记 $A=l+c-mx_0, B=cl+bnx_0y_0-mx_0l, C=bcnx_0y_0$.

则 $\Delta(\lambda,0)=\lambda^3+A\lambda^2+B\lambda+C=0$ (5)

由 Routh - Hurwitz 准则知:

(5) 的根有负实部的充要条件为

因此当 $A>0, AB-C>0, BC>0$ 时 (i) 满足.

又 $\forall y,\tau\in R,\tau\geq 0$, $\Delta(iy,\tau)=iy(iy+l)(mx_0e^{-iy\tau}-c-iy)-(c+iy)bnx_0y_0$.

(a) 当 $y=0$ 时, $\Delta(i0,\tau)=-bcnx_0y_0\neq 0$.

(b) 当 $y\neq 0$ 时, 设 $\lambda=yi, w=-\tau y$, 代入方程(4) 得

$$F(y,w)=iy(iy+1)(mx_0e^{wi}-c-iy)-(c+iy)bnx_0y_0=0. \tag{6}$$

为证明本定理, 我们去寻找引理的条件 (ii) 不成立的充要条件, 即存在 $y\neq 0,\tau>0$, 使得 $\Delta(iy,\tau)=0$ 的充要条件. (6) 分离实部和虚部得

$$mx_0ly\sin w+mx_0y^2\cos w+bcnx_0y_0-cy^2-ly^2=0;$$
$$mx_0y^2\sin w-mx_0ly\cos w+bcnx_0y_0y-y^3+cly^2=0. \tag{7}$$

从(7) 中消去 w 得

$$y^6-(2bnx_0y_0-m^2x_0^2-c^2-l^2)y^4$$
$$+[(bnx_0y_0)^2-2bncx_0y_0(c+l)-(mx_0l)^2]y^2+(bcnx_0y_0)^2=0. \tag{8}$$

$\Delta(iy,\tau)=0$, 即 $F(y,w)=0$ 的充要条件是(8) 有实根.

故引理的条件 (ii) 成立的充要条件为(8) 无非零实根.

令 $z=y^2$, 记 $D=-2bnx_0y_0-m^2x_0^2-c^2-l^2$

$$E=(bnx_0y_0)^2-2bcnx_0y_0(c+1)-(mxl)^2, F=(bcnx_0y_0)^2,$$

则(8) 化为 $z^3+Dz^2+Ez+F=0$. (9)

根据 Routh - Hurwitz 准则得,

当 $D>0, DE-F>0, EF>0$ 时, (9) 只有负实根, 故(8) 无非零实根. 又由(8) 无零根, 从而 (ii) 成立.

2.2 系统的 **Hopf** 分支

若定理 **1** 的条件(a) 成立且(8) 有非零实根, 则系统(2) 可能出现 Hopf 分支. 下面讨论出现 Hopf 分支的条件.

在(9) 中, 当 $D=0, E\neq 0, \frac{F^2}{4}+\frac{E^3}{27}=0$ 时, (8) 有非零实根. 设 $y=\omega_0$ 为方程(8) 的非零实根, 并注意到定理 1 的条件(a) 成立时, 从中可以得到

$$\cos(\tau\omega_0)=\frac{c\omega_0^2+cl^2-bcnx_0y_0-bnx_0y_0l}{mx_0\omega_0+mx_0l^2\omega_0}\stackrel{\Delta}{=}\frac{M}{N}.$$

记 $\tau_0=\min\{\tau\mid\tau=\frac{1}{\omega_0}\arccos\frac{M}{N}\}$, 则当 $\tau=\tau_0$ 时, 方程 $\Delta(\lambda,\tau)=0$ 有一对纯虚根 $\lambda=\pm\omega_0 i$, 其余特征根实部均为负的.

在(4) 中, 设 $\lambda(\tau)=\alpha(\tau)+i\omega(\tau)$, 对 τ 求导, 分离实部和虚部得:

$$\frac{\mathrm{d}\alpha(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\Big|_{\tau=\tau_0}=\frac{K_1K_3-K_2K_4}{K_3^2+K_4^2}.$$

(下转第 124 页)

表2　采用CP (Compromise Programming Approach)方法的优化结果

Tab. 2　Optimization outcome by use of CP

实验号	最优容差/μm			加工成本 /C_1	生产成本 /C_2	$(\omega_{C_1}, \omega_{C_2})$	β
	Δx_1	Δx_2	Δx_3				
1	54	46	46	7.6681	0.000370	(0.3, 0.7)	0.155089
2	54	74	74	5.8135	0.000462	(0.7, 0.3)	0.137224
3	35	74	74	6.8848	0.000410	(0.4, 0.6)	0.176025
4	54	74	74	5.8135	0.000462	(0.6, 0.4)	0.182965
5	54	46	74	6.7408	0.000413	(0.5, 0.5)	0.166759
6	54	74	46	6.7408	0.000413	(0.5, 0.5)	0.166759

注: 所用实验数据同表1

4 结束语

论文引入了模糊数学中的隶属度函数和贴近度理论,利用模糊数学中的择近原则得到基于成本-质量模型这一多目标稳健设计的全局最优解.并通过实例验证了该方法的有效性.需要指出的是,所选实例中采用的加权距离中的权系数取为 $\omega=(1,1)$,对不同的加权系数可得到不同的隶属度.但是为了得到低成本高质量的产品,建议加工成本(C_1)分配的加权系数应该小于等于生产成本(C_2)分配的加权系数.另外,模糊稳健优化设计方法是一种新的设计方法,具有广阔的研究空间和应用前景.

参考文献:

[1] 汪培庄. 模糊集合及其应用[M]. 上海:上海科技出版社,1983:91~93.

[2] Chen W, Wiecek M M, Zhang J. Quality Utility - a Compromise Programming Approach to Robust Design[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 1999, 121: 179~187.

[3] 曹衍龙,杨将新,吴昭同. 基于模拟实验法的离散公差稳健设计[J]. 工程设计学报, 2003, 10(1): 11~14.

[4] 于忠海. 基于模糊数学的稳健设计[J]. 机械设计, 2003, 20(7): 26~28.

(上接第117页)

其中 $K_1=-\omega_0^2+bnx_0y_0\cos\omega_0\tau_0-lmx_0\cos\omega_0\tau_0-c$;

$K_2=l\omega_0-bnx_0y_0\sin\omega_0\tau_0+lmx_0\sin w_0\tau_0-\omega_0$;

$K_3=2\omega_0(mx_0\sin\omega_0\tau_0+\omega_0)+l(mx_0\cos\omega_0\tau_0-c)-mx_0\omega_0$
$(\omega_0\cos\omega_0\tau_0+\omega_0^2\sin\omega_0\tau_0+bnx_0y_0\omega_0\cos\omega_0\tau_0-bnx_0y_0l\omega_0\sin\omega_0\tau_0)$;

$K_4=2\omega_0(mx_0\cos\omega_0\tau_0-c)-l(mx_0\sin\omega_0\tau_0+\omega_0)+$
$mx_0\omega_0(\omega_0^2\cos\omega_0\tau_0+\omega_0\sin\omega_0\tau_0)-bnx_0y_0(\omega_0\sin\omega_0-\omega_0\cos\omega_0\tau_0)$;

$\alpha(\tau_0)=0,\ \omega(\tau_0)=\omega_0$.

从而当 $\dfrac{K_1K_3-K_2K_4}{K_3^2+K_4^2}\neq 0$ 时,系统出现Hopf分支.

参考文献:

[1] Tatyana Luzyanina, Koen Engelbo. Low Level Viral Persistence after Infection with LCMV: Aquantitative Insight Through Numerical Bifurcation Analysis[J]. Mathematical Biosciences, 2001, 173: 1~23.

[2] 秦元勋,刘永清,王联,等. 带有时滞的动力系统的运动稳定性[M]. 北京:北京科学出版社, 1989.103~108.