第 45 卷 第 1 期　　昆明理工大学学报(自然科学版)　　No. 1 Vol. 45
2020 年 2 月　　Journal of Kunming University of Science and Technology(Natural Science)　　Feb. 2020

doi: 10.16112/j.cnki.53-1223/n.2020.01.017

# 一类特殊五阶图与 $n$ 个孤立顶点的联图的交叉数

何翠芳[1]，吕胜祥[1,2]

(1. 湖南科技大学 数学与计算科学学院，湖南 湘潭 411201; 2. 湖南财政经济学院 数学与统计学院，湖南 长沙 410205)

**摘要:** 图的交叉数是图的一个重要参数，1983 年 Garey 和 Johnson 证明了确定图的交叉数问题是一个 NP-完全问题. 令 $H$ 为一个简单五阶图，$H_n$ 是图 $H$ 与 $n$ 个孤立顶点的联图. 当 $n=1,2,3,4,5$ 且 $p=1$ 或 2 时，若都有 $Cr(H_n) \geqslant Z(5,n)+p\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+Cr(E(H))$，则当 $n>5$ 时，也成立 $Cr(H_n) \geqslant Z(5,n)+p\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+Cr(E(H))$.

**关键词:** 联图; 交叉数; 二部图，画法

**中图分类号:** O157　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1007-855X(2020)01-0119-07

# The Crossing Number of Join Graphs of Some 5-Vertex Graphs with $n$ Isolated Vertices

**HE Cuifang, LÜ Shengxiang**

(1. School of Mathematics and Computational Science, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan, Hunan 411201, China; 2. School of Mathematics and Statistics, Hunan University of Finance and Economics, Changsha 410205, China)

**Abstract:** The crossing number of graphs is an important parameter. In 1983, Garey and Johnson proved that the problem of determining the crossing number of graphs is a NP-complete problem. Let $H$ be a simple graph with five vertices. $H_n$ is the join graph of $H$ with $n$ isolated vertices. When $n=1,2,3,4,5$ and $p=1$ or 2, if it holds $Cr(H_n) \geqslant Z(5,n)+p\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+Cr(E(H))$, then, for all $n>5$, it also holds $Cr(H_n) \geqslant Z(5,n)+p\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+Cr(E(H))$.

**Key words:** joint graph; crossing number; bipartite graph; drawing

## 1 预备知识

本文未说明的概念和术语均同文献[1]. 图 $G$ 是一个二元组$(V(G),E(G))$，其中 $V(G)$ 称为 $G$ 的顶点集，$E(G)$ 称为 $G$ 的边集. 一个画法称为好画法，倘若满足以下条件:

1) 端点相同的两条边无法相交;
2) 边无法自身相交;
3) 任何两条边至多相交一次;
4) 不存在三条边会有共同的交点.

若 $G$ 的某个好画法用 $\phi$ 来表示，则在画法 $\phi$ 下 $G$ 的交叉数是指 $G$ 中边与边的所有交叉个数，记为 $Cr_\phi(G)$，$Cr(G)=\min\limits_{\phi}\{Cr_\phi(G)\}$ 为图 $G$ 的交叉数，其中最小值 min 取遍 $G$ 的所有好画法 $\phi$.

**定义 1**[1]　设 $E'$ 是 $E$ 的一个非空边子集，以 $E'$ 为边集，以 $E'$ 中边的端点全体为顶点集所组成的子图称为 $G$ 的由 $E'$ 导出的子图，记为 $G[E']$；$G[E']$ 称为 $G$ 的边导出子图.

收稿日期: 2019-08-17. 基金项目: 湖南省自然科学基金项目(2019JJ40080).

作者简介: 何翠芳(1994-)，女，硕士研究生. 主要研究方向: 图论及其应用. E-mail: 15200808140@163.com

通信作者: 吕胜祥(1979-)，男，博士，副教授. 主要研究方向: 图论及其应用. E-mail: lvsxx23@126.com

**定义2**[2] 设 $\phi$ 是图 $G$ 的一个画法，$H$ 是 $G$ 的子图,则 $\phi$ 在 $H$ 上的限制画法,记为 $\phi|_H$,表示在画法 $\phi$ 中与子图 $H$ 相关的部分.

设 $G,H$ 是两个简单图,且 $V(G)\cap V(H)=\phi$,$E(G)\cap E(H)=\phi$. $G$ 与 $H$ 的联图 $G+H=(V(G+H),E(G+H))$,其中 $V(G+H)=V(G)\cup V(H)$,$E(G+H)=E(G)\cup E(H)\cup\{uv\mid u\in V(G),v\in V(H)\}$. 令 $A,B$ 是图 $G$ 的互不相交的边子集，$\phi$ 是图 $G$ 的一个好画法,令

$$Cr_{\phi}(A,B)=\sum_{a\in A,b\in B}|\phi(a)\cap\phi(b)|$$

另外,令 $Cr_{\phi}(A,A)=Cr_{\phi}(A)$. 其中 $Cr_{\phi}(A,B)$ 表示 $A$ 中的边与 $B$ 中的边之间产生的交叉数. 下面给出本文常用的两个性质:

**性质1** 设 $\phi$ 是图 $G$ 的一个好画法,且图 $G$ 三个边子集 $A,B,C$ 互不相交,则

1) $Cr_{\phi}(A\cup B)=Cr_{\phi}(A)+Cr_{\phi}(B)+Cr_{\phi}(A,B)$;

2) $Cr_{\phi}(A,B\cup C)=Cr_{\phi}(A,B)+Cr_{\phi}(A,C)$.

**性质2** 若 $G$ 是 $H$ 的子图,则有 $Cr(G)\leqslant Cr(H)$.

图的交叉数是图的一个重要参数. 研究图的交叉数不但具有较强的理论依据,而且在实际生活中有广泛的应用. 如草图的识别与重画问题等. 但是研究图的交叉数困难重重，文献[3]证明了确定图的交叉数问题是 NP－完全问题. 所以学者主要研究一些具有特殊结构的图类,如完全－2部图 $K_{m,n}$,完全－3部图 $K_{1,m,n}$,笛卡尔积图,循环图等[4-7]. Zarankiewice[8]提出了完全2－部图 $K_{m,n}(m\leqslant n)$ 的交叉数的猜想(称为 Zarankiewice 猜想)

$$Cr(K_{m,n})=\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{m-1}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor \tag{1}$$

记上式右边表达式 $Z(m,n)$,其中 $\lfloor x\rfloor$ 表示不超过 $x$ 的最大整数. Kleitman[9]证明了 Zarankiewice 猜想当 $m\leqslant 6$ 或者 $m=7$ 且 $n\leqslant 10$ 的条件下是成立的.

20世纪以来,联图的交叉数引起学者们的注意. Marian Klesc,吕胜祥等[10-11]确定了一些特殊五阶图、六阶图与 $n$ 个孤立顶点的联图的交叉数. 并且部分学者对 $Cr(G\backslash e)$ 做了有关研究[12-16],他们的研究结果表示去掉一条边不会减少很多交叉数. 在此基础上,本文确定了一类特殊五阶图与 $n$ 个孤立顶点的联图的交叉数.

## 2 引理和定理

假定 $H$ 为一个简单五阶图,用 $\overline{K_n}$ 表示 $n$ 个孤立顶点,即 $V(\overline{K_n})=(Z_1,Z_2,\cdots Z_n)$,$E(\overline{K_n})=\phi$. 图 $H$ 与 $n$ 个孤立顶点的联图,记为 $H+\overline{K_n}$. 为了方便,记 $H_n=H+\overline{K_n}$. 在 $H_n$ 的某个好画法 $\phi$ 下,定义 $E_{Z_i}$ 为 $Z_i$ 的相关联的边的集合;定义加权完全图为 $EL_{\phi}(H_n)$,其顶点集为 $\{Z_i\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$,且每条边 $Z_iZ_j$ 上的权为 $Cr_{\phi}(E_{Z_i},E_{Z_j})$,其中 $1\leqslant i<j\leqslant n$. 如果 $X\subseteq\{Z_1,Z_2,\cdots Z_n\}$,则 $EL_{\phi}(H_n)[X]$ 称为由 $X$ 诱导的 $EL_{\phi}(H_n)$ 的顶点诱导子图.

**引理1**[17] 令 $\phi$ 与 $\phi'$ 是完全二部图 $K_{m,n}$ 的两个好画法,如果 $m,n$ 均为奇数,则有 $Cr_{\phi}(K_{m,n})\equiv Cr_{\phi}(K_{m,n})\pmod 2$

**引理2** 令 $\phi$ 是 $H_n$ 的一个好画法,$n\geqslant 1$. 如果 $T$ 为集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的子集,并且有 $|T|=t\geqslant 1$,则有

1) $<\bigcup_{i\in T}E_{Z_k}>\cong K_{5,t}$,并且 $<\bigcup_{i\in T}E_{Z_k}>\cup E(H)\cong H_t$;

2) $Cr_{\phi}(E_{Z_i})=0$ 对任意的 $1\leqslant i\leqslant n$ 成立.

**证明** 1) 由定义,易得结论成立.

2) 由定义,因为关联同一个顶点的边不能相互交叉,于是得到 $Cr_{\phi}(E_{Z_i})=0$.

**引理3** 令完全二部图 $K_{5,5}$ 的顶点划分为 $\{a_0,a_1,a_2,a_3,a_4\}$ 和 $\{Z_1,Z_2,Z_3,Z_4,Z_5\}$,则不存在 $K_{5,5}$ 的好画法 $\phi$,使得

$$Cr_{\phi}(E_{Z_1},E_{Z_i})=1,2\leqslant i\leqslant 5 \tag{2}$$

$$Cr_{\phi}(E_{Z_j},E_{Z_k})=2,2\leqslant k<j\leqslant 5 \tag{3}$$

同时成立.

证明　（本引理及其证明由黄元秋教授等提供）

假定 $\phi$ 是 $K_{5,n}$ 的一个好画法，且满足等式(2)和(3)，则在画法 $\phi$ 下，$< E_{Z_1} \cup E_{Z_i} >$，$i \in \{2,3,4,5\}$ 的同构子图是唯一确定的. $< E_{Z_1} \cup E_{Z_5} >$ 的子图如图 1 所示. 下面考虑 $< E_{Z_1} \cup E_{Z_5} >$ 的子图. 对于任意的 $i = 2,3,4$，我们知道 $Cr_\phi(E_{Z_1}, E_{Z_i}) = 1$ 且 $Cr_\phi(E_{Z_5}, E_{Z_i}) = 2$，所以如图 1 所示，对于顶点 $Z_i$，$i = 2,3,4$ 只能位于 $\alpha$ 或 $\beta$ 区域. 如果存在顶点 $Z_i$，$i = 2,3,4$ 位于区域 $\alpha$，不难证明，在画法 $\phi$ 下，$Z_i$ 的旋系为 $(a_0a_1a_3a_2a_4)$ 和 $(a_0a_2a_3a_4a_1)$ 两种，才能使得等式(2)和(3)成立. 类似的，如果存在顶点 $Z_i$，$i = 2,3,4$ 位于区域 $\beta$，我们可以得到 $Z_i$ 的旋系为 $(a_0a_2a_3a_4a_1)$ 和 $(a_1a_3a_4a_0a_2)$，因此不存在顶点 $Z_i$，$Z_j$，其中 $i,j = 2,3,4$ 且 $i \neq j$ 的旋系相同. 否则，根据等式(2)知 $Cr_\phi(E_{Z_i}, E_{Z_j}) \geqslant 4$，与等式(3)矛盾. 因此三个顶点 $Z_2$，$Z_3$，$Z_4$ 的旋系都不相同. 所以顶点 $Z_2$，$Z_3$，$Z_4$ 只能位于 $\alpha$ 或 $\beta$ 区域，且有两个顶点位于同一区域. 假定 $Z_2$，$Z_3$ 位于相同区域，不失一般性，假定 $Z_2$，$Z_3$ 位于区域 $\alpha$，且 $Z_2$ 的旋系 $Z_2 = (a_0a_2a_3a_4a_1)$，则 $< E_{Z_1} \cup E_{Z_5} \cup E_{Z_2} >$ 的子画法如图 2 所示，区域 $\alpha$ 被 $< E_{Z_2} >$ 划分为五个以 ▲ 和 ■ 标记的区域. 在标有 ▲ 的两个区域的边界上，恰好有一个顶点 $a_i$，$i \in \{0,1,2,3,4\}$，他们的边界由 $E_{Z_1} \cup E_{Z_2}$ 中某些边的线段形成. 如果存在顶点 $Z_i$，$i = 3,4$ 位于两个区域中的其中一个，则有 $Cr_\phi(E_{Z_i}, E_{Z_1} \cup E_{Z_2}) \geqslant 4$，结合等式(2)，$Cr_\phi(E_{Z_i}, E_{Z_2}) \geqslant 3$，$i \in \{3,4\}$，与等式(3)矛盾. 因此，顶点 $Z_i$，$i = 3,4$ 只能位于标记为 ■ 区域的三个中的其中一个. 类似于 ▲ 区域分析，如果 $Z_i$，$i = 3,4$ 位于 ■ 区域的其中一个，则我们很容易得到 $Cr_\phi(E_{Z_i}, E_{Z_1} \cup E_{Z_5} \cup E_{Z_2}) \geqslant 6$，与等式(2)矛盾. 因此顶点 $Z_2$，$Z_3$ 位于 $\beta$ 区域我们可以得到类似矛盾.

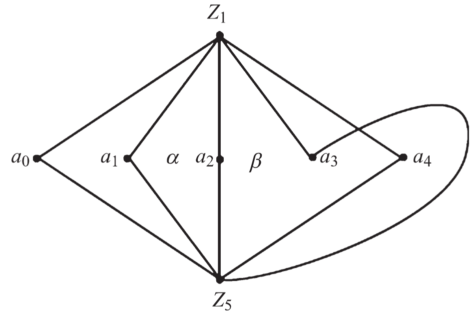

图1 〈$E_{Z_1} \cup E_{Z_5}$〉的子图
Fig.1 The subgraph of 〈$E_{Z_1} \cup E_{Z_5}$〉

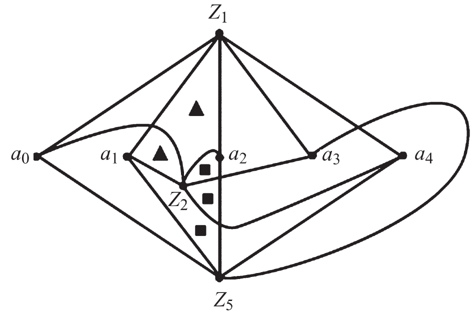

图2 〈$E_{Z_1} \cup E_{Z_5} \cup E_{Z_2}$〉的子图
Fig.2 The subgraph of 〈$E_{Z_1} \cup E_{Z_5} \cup E_{Z_2}$〉

**引理 4**　令 $\phi$ 是 $H_n$ 的一个好画法，且 $Cr(H_{n-1}) \geqslant Z(5,n-1) + p\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + Cr(E(H))$，$0 < p \leqslant 2$. 若存在 $H_n$ 的一个顶点 $Z_1$，使得 $Cr_\phi(Z_1) \geqslant 2n-2$，则 $Cr_\phi(H_n) \geqslant Z(5,n) + p\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + Cr(E(H))$.

证明　若存在 $Cr_\phi(Z_1) \geqslant 2n-2$，则

$$\begin{aligned} Cr_\phi(H_n) &= Cr_\phi(E_{Z_1} \cup \bigcup_{j=2}^{n} E_{Z_j} \cup E(H)) = Cr_\phi(E_{Z_1}) + Cr_\phi(\bigcup_{j=2}^{n} E_{Z_j} \cup E(H)) + Cr_\phi(E_{Z_1}, \bigcup_{j=2}^{n} E_{Z_j} \cup E(H)) \\ &\geqslant 0 + Cr_\phi(H_{n-1}) + 2n - 2 = Z(5,n-1) + p\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 2n - 2 + Cr_\phi(E(H)) \\ &\geqslant Z(5,n) + p\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + Cr(E(H)) \end{aligned}$$

**引理 5**　令 $\phi$ 是 $H_n$ 的一个好画法，且 $Cr(H_{n-2}) \geqslant Z(5,n-2) + p\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor + Cr(E(H))$，$0 < p \leqslant 2$. 若存在 $H_n$ 的两个顶点 $Z_1$，$Z_2$，使得 $Cr_\phi(E_{Z_1}, E_{Z_2}) = 0$ 且 $Cr_\phi(E_{Z_1} \cup E_{Z_2}, E(H)) \geqslant p$，则

$$Cr_\phi(H_n) \geqslant Z(5,n) + p\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + Cr(E(H))$$

证明　因为 $Cr_\phi(E_{Z_1}, E_{Z_2}) = 0$，那么对任意的 $2 \leqslant j \leqslant n$，有

$$\begin{aligned} Cr_\phi(E_{Z_1} \cup E_{Z_2}, E_{Z_j}) &= Cr_\phi(E_{Z_1} \cup E_{Z_2} \cup E_{Z_j}) - Cr_\phi(E_{Z_1} \cup E_{Z_2}) - Cr_\phi(E_{Z_j}) \\ &\geqslant Cr(K_{5,3}) - 0 - 0 = Z(5,3) = 4 \end{aligned}$$

于是根据交叉数的性质 1，性质 2 可得

$$\begin{aligned}Cr_\phi(H_n) &= Cr_\phi(E_{Z_1}\cup E_{Z_2}\cup \bigcup_{j=3}^{n}E_{Z_j}\cup E(H))\\ &= Cr_\phi(E_{Z_1}\cup E_{Z_2})+Cr_\phi(\bigcup_{j=3}^{n}E_{Z_j}\cup E(H))+Cr_\phi(E_{Z_1}\cup E_{Z_2},\bigcup_{j=3}^{n}E_{Z_j})+Cr_\phi(E_{Z_1}\cup E_{Z_2},E(H))\\ &\geqslant 0+Cr_\phi(H_{n-2})+4(n-2)+p\\ &\geqslant Z(5,n-2)+p\left\lfloor\frac{n-2}{2}\right\rfloor+Cr_\phi(E(H))+4(n-2)+p\\ &\geqslant Z(5,n)+p\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+Cr(E(H))\end{aligned}$$

**引理6** 令$\phi$是$H_n$的一个好画法,且$Cr(H_{n-4})\geqslant Z(5,n-4)+p\left\lfloor\frac{n-4}{2}\right\rfloor+Cr(E(H))$,$0<p\leqslant 2$.若存在$H_n$的四个顶点$Z_1,Z_2,Z_3,Z_4$,使得$Cr_\phi(\bigcup_{k=1}^{4}E_{Z_k})=8$即$<\bigcup_{k=1}^{4}E_{Z_k}>$在画法$\phi$下是最优的,且$Cr_\phi(\bigcup_{k=1}^{4}E_{Z_k},E(H))\geqslant 2p$,则$Cr_\phi(H_n)\geqslant Z(5,n)+p\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+Cr(E(H))$.

**证明** 由于$Cr_\phi(\bigcup_{k=1}^{4}E_{Z_k})=8$,则

$$\begin{aligned}Cr_\phi(\bigcup_{k=1}^{4}E_{Z_k},E_{Z_j}) &= Cr_\phi(\bigcup_{k=1}^{4}E_{Z_k}\cup E_{Z_j})-Cr_\phi(\bigcup_{k=1}^{4}E_{Z_k})-Cr_\phi(E_{Z_j})\geqslant Cr(K_{5,5})-Z(5,4)-0\\ &= Z(5,5)-Z(5,4)=8\end{aligned}$$

根据交叉数的性质1,性质2及引理1得

$$\begin{aligned}Cr_\phi(H_n) &= Cr_\phi(\bigcup_{k=1}^{4}E_{Z_k}\cup\bigcup_{j=5}^{n}E_{Z_j}\cup E(H))\\ &= Cr_\phi(\bigcup_{k=1}^{4}E_{Z_k})+Cr_\phi(\bigcup_{j=5}^{n}E_{Z_j}\cup E(H))+Cr_\phi(\bigcup_{k=1}^{4}E_{Z_k},\bigcup_{j=5}^{n}E_{Z_j})+Cr_\phi(\bigcup_{k=1}^{4}E_{Z_k},E(H))\\ &\geqslant Cr(K_{5,4})+Cr_\phi(H_{n-4})+8(n-4)+2p\\ &\geqslant 8+Z(5,n-4)+p\left\lfloor\frac{n-4}{2}\right\rfloor+Cr_\phi(E(H))+8(n-4)+2p\\ &\geqslant Z(5,n)+p\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+Cr(E(H))\end{aligned}$$

**定理1** 令$H$为一个五阶简单图,$H_n$是图$H$与$n$个孤立顶点的联图.当$n=1,2,3,4,5$且$p=1$或2时,若都有$Cr(H_n)\geqslant Z(5,n)+p\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+Cr(E(H))$,则当$n>5$时,也成立

$$Cr(H_n)\geqslant Z(5,n)+p\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+Cr(E(H)) \tag{4}$$

**证明** 令$\phi$是$H_n$的任意一个好画法.我们用归纳法来证明$Cr_\phi(H_n)$满足不等式(4).

若存在两个不同的顶点$Z_i,Z_j$使得$Cr_\phi(E_{Z_i},E_{Z_j})=0$,结合引理5知定理结论成立.因此,我们假设对任意的$1\leqslant i<j\leqslant n$,$Cr_\phi(E_{Z_i},E_{Z_j})\geqslant 1$.

**断言1** 若对任意三个不同的顶点$Z_i,Z_j,Z_k$都成立$Cr_\phi(E_{Z_i}\cup E_{Z_j}\cup E_{Z_k})\geqslant 6$,则

$$Cr_\phi(H_n)\geqslant Z(5,n)+p\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+Cr(E(H))$$

**证明** 根据交叉数的性质1,可得

$$\begin{aligned}Cr_\phi(H_n) &= Cr_\phi(\bigcup_{j=1}^{n}E_{Z_j}\cup E(H))\geqslant Cr_\phi(\bigcup_{j=1}^{n}E_{Z_j})+Cr_\phi(E(H))\\ &= \frac{6C_n^3}{n-2}+Cr_\phi(E(H))=n^2-n+Cr_\phi(E(H))\geqslant Z(5,n)+p\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+Cr(E(H))\end{aligned}$$

**断言2** 存在三个不同的顶点$Z_1,Z_2,Z_3$使得$Cr_\phi(E_{Z_1}\cup E_{Z_2}\cup E_{Z_3})=4$,若对任意的顶点$Z_j\in V(\overline{K_n})$

$\backslash\{Z_1, Z_2, Z_3\}$ 有 $Cr_\phi(E_{Z_1} \cup E_{Z_2} \cup E_{Z_3}, E_{Z_4}) \neq 5$，则不等式(4)成立.

**证明**　若存在 $Z_4$ 使得 $Cr_\phi(E_{Z_1} \cup E_{Z_2} \cup E_{Z_3}, E_{Z_4}) = 4$，则 $Cr_\phi(\bigcup_{k=1}^{4} E_{Z_k}) = 8$，由引理 6 知结论成立. 若对任意的 $Z_j \in V(\overline{K_n}) \backslash\{Z_1, Z_2, Z_3\}$，都有 $Cr_\phi(\bigcup_{k=1}^{3} E_{Z_k}, E_{Z_4}) \geq 6$，则

$$\begin{aligned}
Cr_\phi(\bigcup_{k=1}^{3} E_{Z_k}, E(H)) &= Cr_\phi(\bigcup_{k=1}^{3} E_{Z_k} \cup E(H)) - Cr_\phi(\bigcup_{k=1}^{3} E_{Z_k}) - Cr_\phi(E(H)) \\
&= Cr(H_3) - 4 - Cr_\phi(E(H)) \\
&\geq 4\left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor + p\left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor - 4 = p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Cr_\phi(H_n) &\geq Cr_\phi(\bigcup_{k=1}^{3} E_{Z_k}) + Cr_\phi(\bigcup_{j=4}^{n} E_{Z_j} \cup E(H)) + Cr_\phi(\bigcup_{k=1}^{3} E_{Z_k}, E(H)) + Cr_\phi(\bigcup_{k=1}^{3} E_{Z_k}, \bigcup_{j=4}^{n} E_{Z_j}) \\
&\geq 4 + Z(5, n-3) + p\left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor + Cr_\phi(E(H)) + p + 6(n-3) \\
&= 4 + 4\left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-4}{2} \right\rfloor + p\left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor + 6n - 18 + p + Cr_\phi(E(H)) \\
&\geq Z(5, n) + p\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + Cr(E(H))
\end{aligned}$$

**断言 3**　存在四个不同的顶点 $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$，使得 $Cr_\phi(E_{Z_1} \cup E_{Z_2} \cup E_{Z_3}) = 4$ 且 $Cr_\phi(\bigcup_{k=1}^{3} E_{Z_k}, E_{Z_4}) = 5$，则不等式(4)成立.

**证明**　因为 $Cr_\phi(\bigcup_{k=1}^{3} E_{Z_k}, E_{Z_4}) = 5$，不妨令

$Cr_\phi(E_{Z_1}, E_{Z_4}) = a$，$Cr_\phi(E_{Z_2}, E_{Z_4}) = b$，$Cr_\phi(E_{Z_3}, E_{Z_4}) = c$

根据引理 1，于是成立

$$\begin{cases}
a + b = 3 + 2k_1 \\
a + c = 3 + 2k_2 \\
b + c = 2 + 2k_3 \\
a + b + c = 5
\end{cases}$$

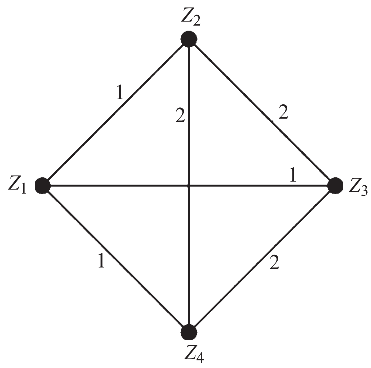


图3　图 $EL_\phi(H_4)$

Fig.3　The graph $EL_\phi(H_4)$

经简单计算，易得 $b = c = 2$，$a = 1$. 如图 3 所示.

根据引理 2，对任意的 $Z_j(5 \leq j \leq n)$ 成立

$$Cr_\phi(\bigcup_{k=1}^{4} E_{Z_k}, E_{Z_j}) = Cr_\phi(\bigcup_{k=1}^{4} E_{Z_k} \cup E_{Z_j}) - Cr_\phi(E_{Z_j}) = Cr_\phi(K_{5,5}) - 9$$

由引理 1 易知 $Cr_\phi(K_{5,5}) = 16$ 或 $\geq 18$，所以 $Cr_\phi(\bigcup_{k=1}^{4} E_{Z_k}, E_{Z_j}) = 7$ 或 $\geq 9$.

假定存在顶点 $Z_j(5 \leq j \leq n)$，使得 $Cr_\phi(\bigcup_{k=1}^{4} E_{Z_k}, E_{Z_j}) = 7$. 不妨令

$Cr_\phi(E_{Z_1}, E_{Z_j}) = a$，$Cr_\phi(E_{Z_2}, E_{Z_j}) = b$，$Cr_\phi(E_{Z_4}, E_{Z_j}) = c$，$Cr_\phi(E_{Z_3}, E_{Z_j}) = d$

$EL_\phi(H_5)$ 如图 4 所示.

则

$$\begin{cases}
a + b = 3 + 2k_1 \\
a + c = 3 + 2k_2 \\
a + d = 3 + 2k_3 \\
b + c = 2 + 2k_4 \\
b + d = 2 + 2k_5 \\
c + d = 2 + 2k_6
\end{cases}$$

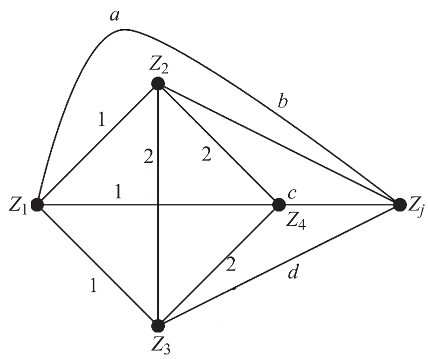


图4　图 $EL_\phi(H_5)$

Fig.4　The graph $EL_\phi(H_5)$

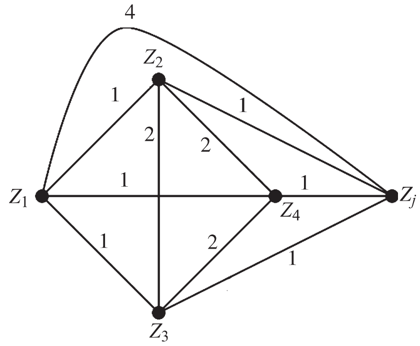


图5 图$EL_\phi(H_5)$
Fig.5 The graph $EL_\phi(H_5)$

易得 $b+c+d=3+k_4+k_5+k_6$,$a+b+c+d=5+\frac{2}{3}(k_1+k_2+k_3+k_4+k_5+k_6)=7$,所以 $k_1+k_2+k_3+k_4+k_5+k_6=3$.

若 $k_1+k_2+k_3=0$,$k_4+k_5+k_6=3$,则 $a=1$. $b=c=d=2$,根据引理 3,该画法不存在.

若 $k_1+k_2+k_3=1$,$k_4+k_5+k_6=2$,不妨令 $k_1=1$,则 $a=2$,$b=3$,$c=d=1$,于是 $Z_1$,$Z_3$,$Z_4$,$Z_5$ 构成 $K_{5,4}$ 且交叉数为 8,矛盾.

若 $k_1+k_2+k_3=2$,$k_4+k_5+k_6=1$,则容易得到 $b$,$c$,$d$ 中至少一个为 0,矛盾.

若 $k_1+k_2+k_3=3$,$k_4+k_5+k_6=0$,则 $b=c=d=1$,$a=4$,存在,如图 5 所示.

于是

$$Cr_\phi(E_{Z_i},E_{Z_k})=1\text{,其中 } i=1,5;k=2,3,4 \tag{5}$$

$$Cr_\phi(E_{Z_m},E_{Z_n})=2\text{,其中 } 2\leqslant m<n\leqslant 4 \tag{6}$$

当 $n\geqslant 6$ 时,令 $S=\{Z_j \mid Cr_\phi(\bigcup_{k=1}^{4}E_{Z_k},E_{Z_j})=7,5\leqslant j\leqslant n\}$ 且 $|S|=s$.

因此,如果顶点 $Z_j$ 不属于集合 $S$,则有 $Cr_\phi(\bigcup_{k=1}^{4}E_{Z_k},E_{Z_j})\geqslant 9$

根据引理 1 以及引理 2,则有

$$\begin{aligned}Cr_\phi(\bigcup_{k=1}^{4}E_{Z_k},E(H)) &= Cr_\phi(\bigcup_{k=1}^{4}E_{Z_k}\cup E(H))-Cr_\phi(\bigcup_{k=1}^{4}E_{Z_k})-Cr_\phi(E(H))\\ &= Cr(H_4)-9-Cr_\phi(E(H))\\ &\geqslant 4\left\lfloor\frac{4}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{3}{2}\right\rfloor+p\left\lfloor\frac{4}{2}\right\rfloor-9=2p-1\end{aligned}$$

根据图 5 我们容易知道 $Cr_\phi(E_{Z_1},E_{Z_i})=1,2\leqslant i\leqslant 4$ 且 $Cr_\phi(E_{Z_1},E_{Z_j})=4$,$Z_j\in S$. 因此有

$$Cr_\phi(Z_1)\geqslant 3+4s+(n-4-s)=n-1+3s \tag{7}$$

如果 $Cr_\phi(Z_1)\geqslant 2n-2$,根据引理 4 可知 $Cr_\phi(H_n)\geqslant Z(5,n)+p\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+Cr(E(H))$. 因此 $Cr_\phi(Z_1)\leqslant 2n-3$,结合(7) 可得 $s\leqslant\left\lfloor\frac{n-2}{3}\right\rfloor$. 则有

$$\begin{aligned}Cr_\phi(H_n) &= Cr_\phi(\bigcup_{k=1}^{4}E_{Z_k}\cup\bigcup_{j=5}^{n}E_{Z_j}\cup E(H))\\ &= Cr_\phi(\bigcup_{k=1}^{4}E_{Z_k})+Cr_\phi(\bigcup_{j=5}^{n}E_{Z_j}\cup E(H))+Cr_\phi(\bigcup_{k=1}^{4}E_{Z_k},\bigcup_{j=5}^{n}E_{Z_j}\cup E(H))\\ &\geqslant 9+Cr_\phi(H_{n-4})+Cr_\phi(\bigcup_{k=1}^{4}E_{Z_k},\bigcup_{Z_j\in S}E_{Z_j})+Cr_\phi(\bigcup_{k=1}^{4}E_{Z_k},\bigcup_{Z_j\notin S}E_{Z_j})+Cr_\phi(\bigcup_{k=1}^{4}E_{Z_k},E(H))\\ &\geqslant 9+4\left\lfloor\frac{n-4}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n-5}{2}\right\rfloor+p\left\lfloor\frac{n-4}{2}\right\rfloor+Cr_\phi(E(H))-2s+9n-36+2p-1\\ &\geqslant 4\left\lfloor\frac{n-4}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n-5}{2}\right\rfloor+p\left\lfloor\frac{n-4}{2}\right\rfloor+Cr_\phi(E(H))-2\left\lfloor\frac{n-2}{3}\right\rfloor+9n-28+2p-1\end{aligned}$$

所以当 $n\geqslant 6$ 时,有 $Cr_\phi(H_n)\geqslant Z(5,n)+p\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+Cr(E(H))$.

## 参考文献:

[1] Bondy J A, Murty U S R. Graph theory with applications [M]. London: Macmillan, 1976.

[2] 欧阳章东. 关于图的交叉数问题研究 [D]. 长沙: 湖南师范大学, 2011.

(下转第 132 页)

ka, 2006, 71: 541 – 564.
[9] Zhou Y, Wan A T K, Wang X J. Estimating equations inference with missing data [J]. Journal of the American Statistical Association, 2008, 103: 1187 – 1199.
[10] Zhang J, Cui H J. Empirical likelihood confidence region for parameters in linear EV model with missing data [J]. Acta Mathematica Scientia, 2009, 29A(6): 1465 – 1476.
[11] Tang N S, Zhao P Y. Empirical likelihood – based inference in nonlinear regression models with missing responses at random [J]. Statistics, 2013, 47(6): 1141 – 1159.
[12] Guo X, Niu C Z, Yang Y P, et al. Empirical likelihood for single index model with missing covariates at random [J]. Statistics, 2015, 49(3): 1 – 14.
[13] Geman S, Geman D. Stochastic relaxation, Gibbs distribution, and the Bayesian restoration of images [J]. IEEE Transactions On Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1984, 6(6): 721 – 741.
[14] Metropolis N, Rosenbluth A W, Rosenbluth M N, et al. Equations of state calculations by fast computing machine [J]. Journal of Chemical Physics, 1953, 21(6): 1087 – 1091.
[15] Hastings W K. Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications [J]. Biometrika, 1970, 57(1): 97 – 109.
[16] Ibrahim J G, Chen M H, Lipsitz S R. Missing responses in generalized linear mixed models when the missing data mechanism is nonignorable [J]. Biometrika, 2001, 88(2): 551 – 564.
[17] 唐年胜, 韦博成. 非线性再生散度模型 [M]. 北京: 科学出版社, 2007.
[18] Geyer C J. Practical Markov Chain Monte Carlo [J]. Statistical Science, 1992, 7(4): 473 – 483.
[19] Gelman A. Inference and monitoring convergence. In Markov chain Monte Carlo in practice [M]. London: Chapman and Hall, 1996.

(上接第124页)

[3] Garey M R, Johnson D S. Crossing number is NP – complete [J]. SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods, 1983, 4(3): 312 – 316.
[4] 王晶, 黄元秋. 完全3 – 部图 $K_{1,10,n}$ 的交叉数 [J]. 高校应用数学学报, 2008, 23(3): 000349 – 356.
[5] 周志东, 吕胜祥, 周志东, 等. 关于一个特殊六阶图与路和圈的联图的交叉数 [J]. 数学进展, 2014, 43(1).
[6] Asano K. The crossing number of $K_{1,3,n}$ and $K_{2,3,n}$ [J]. Journal of graph theory, 1986, 10(1): 1 – 8.
[7] 吕胜祥, 黄元秋. $K_{2,4} \times S_n$ 的交叉数 [J]. 系统科学与数学, 2010, 30(7): 929 – 935.
[8] Zarankiewicz K. On a problem of P. Turán concerning graphs [J]. Fundamenta Mathematicae, 1955, 1(41): 137 – 145.
[9] Kleitman D J. The crossing number of $K_{5,n}$ [J]. Journal of Combinatorial Theory, 1970, 9(4): 315 – 323.
[10] Klešč M. The crossing numbers of join of the special graph on six vertices with path and cycle [J]. Discrete Mathematics, 2010, 310(9): 1475 – 1481.
[11] 王淑, 吕胜祥. 一个特殊六阶图与 $n$ 个孤立点联图的交叉数 [J]. 昆明理工大学学报(自然科学版), 2017(2): 122 – 126.
[12] Černy J, Kynčl J, Tóth G. Improvement on the decay of crossing numbers [C] // International Symposium on Graph Drawing. Springer, Berlin, Heidelberg, 2007: 25 – 30.
[13] Salazar G. On a crossing number result of Richter and Thomassen [J]. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 2000, 79(1): 98 – 99.
[14] Fox J, Tóth C D. On the decay of crossing numbers [J]. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 2008, 98(1): 33 – 42.
[15] Pach J, Tóth G. Thirteen problems on crossing numbers [J]. Geombinatorics, 2000, 9(4): 194 – 207.
[16] Richter R B, Thomassen C. Minimal graphs with crossing number at least $k$ [J]. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 1993, 58(2): 217 – 224.
[17] Kleitman D J. A note on the parity of the number of crossings of a graph [J]. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 1976, 21(1): 88 – 89.