

# 一类离散动力系统的混沌研究

于晋臣<sup>1</sup>, 张彩艳<sup>2,3</sup>, 彭名书<sup>4</sup>

(1. 山东交通学院, 山东 济南 250023; 2. 山东大学 数学学院, 山东 济南 250100

3. 山东电子职业技术学院, 山东 济南 250014; 4. 北京交通大学, 北京 100044)

**摘要:** 主要研究 Kopel 系统的混沌行为. 首先, 应用中心流形定理和分岔理论, 证明了系统会发生倍周期分岔; 然后, 通过计算最大李雅普诺夫指数, 确定了系统中混沌行为的存在; 最后, 数值模拟的结果显示了与理论分析的一致性.

**关键词:** 倍周期分岔; 最大李雅普诺夫指数; 混沌; 中心流形定理

**中图分类号:** O175.12 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-855X(2009)04-0101-04

## Chaotic Study of a Discrete Dynamical System

YU Jin-chen<sup>1</sup>, ZHANG Cai-yan<sup>2,3</sup>, PENG Ming-shu<sup>4</sup>

(1. Shandong Jiaotong University, Jinan 250023, China; 2. School of Mathematics, Shandong University, Jinan 250100, China; 3. Shandong College of Electronic Technology, Jinan 250014, China;

4. Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

**Abstract** In this paper, the chaos of Kopel system is investigated. Firstly, center manifold theorem and bifurcation theory are applied to prove the emergence of flip bifurcation in the system. Then, the computation of the maximum Lyapunov exponent confirms the existence of chaotic behavior in the model. Finally, the numerical simulation results show the consistence with the theoretical analysis.

**Key words** period-doubling bifurcation; the maximum Lyapunov exponent; chaos; center manifold theorem

## 0 引言

在过去的几十年中, 混沌引起了许多学者, 尤其是数学家, 生物学家, 化学家的浓厚兴趣<sup>[1-5]</sup>. 而随着研究的深入, 越来越多的人被混沌的魅力所征服. 更为重要的是, 人们已经能够运用一些方法来研究一系列重要的非线性问题中的混沌现象.

深入讨论一类离散动力系统——Kopel 系统的混沌行为:

$$x_{n+1} = (1 - \rho)x_n + \rho y_n (1 - y_n) \quad (1)$$

$$y_{n+1} = (1 - \rho)y_n + \rho x_n (1 - x_n)$$

其中  $\rho$  与  $\mu$  为 2 个正参数.

Agiza<sup>[6]</sup> 讨论了该系统平衡点的稳定性, 确定了平衡点的稳定区域. 但他并未注意到, 在区域 II 与区域 V 的交界处, 如图 1 所示, 当平衡点失稳时, 系统会发生倍周期分岔, 并最终走向混沌.

论文是按如下次序组织的. 在第 1 部分, 介绍了所需要用到的定理; 第 2 部分, 应用中心流形定理和分岔理论, 证明了当平衡点失稳时系统会发生倍周期分岔; 第 3 部分, 通过计算最大李雅普诺夫指数, 指出系统会通过倍周期分岔走向混沌; 第 4 部分, 对该系统进行了数值模拟, 数值模拟的结果验证了理论分析的正确性.

### 1 引理<sup>[7]</sup>

给定一个一维系统

$$x \mapsto f(x, a), x \in R^1, a \in R^1,$$

其中  $f$  为一个光滑函数, 在  $a = 0$  时有不动点  $x_0 = 0$  且  $\mu = f'_x(0, 0) = -1$  如果满足下面的非退化条件:

$$(I) \frac{1}{2} (f''_{xx}(0, 0))^2 + \frac{1}{3} f'''_{xxx}(0, 0) \neq 0$$

$$(II) f''_{xa}(0, 0) \neq 0$$

那么该系统在原点处会产生倍周期分岔.

### 2 倍周期分岔

当  $\mu > 1$  时, 平衡点  $O(0, 0)$  开始失稳, 同时, 一个新的稳定的平衡点  $O_1(1 - \frac{1}{\mu}, 1 - \frac{1}{\mu})$  出现了. 接下来, 我们要证明,  $O_1(1 - \frac{1}{\mu}, 1 - \frac{1}{\mu})$  当满足一定条件时是一个倍周期分岔点.

**定理** 当  $\rho = \frac{2}{\mu - 1}, 2 < \mu < 3$  时, 系统会发生倍周期分岔.

**证明:** 令  $x_1 = x - (1 - \frac{1}{\mu}), y_1 = y - (1 - \frac{1}{\mu})$ , 我们把平衡点平移到原点, 此时, 原系统化为:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} (1 - \rho)x_1 + (2 - \mu)y_1 - \rho\mu y_1^2 \\ (1 - \rho)y_1 + (2 - \mu)x_1 - \rho\mu x_1^2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

又, 令  $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , 利用变换  $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ , 那么, (2) 式又化为:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 - 2\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

其中,

$$g_1 = (\rho + 2 - \rho\mu)u - \rho\mu(u^2 + v^2),$$

$$g_2 = 2\rho uv + (\rho\mu - (\rho + 2))v$$

为方便起见, 引入一个新的独立变量  $t = \rho\mu - (\rho + 2), 2 < \mu < 3$ , 那么, (3) 可重新写为:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 - 2\rho & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(u, v, t) \\ f_2(u, v, t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

其中,

$$f_1(u, v, t) = -tu - (\rho + 2 + t)(u^2 + v^2),$$

$$f_2(u, v, t) = tv + 2(\rho + 2 + t)uv$$

由中心流形理论<sup>[8]</sup>, 在  $t = 0$  的邻域内, 平衡点  $(u, v) = (0, 0)$  的稳定性可以通过研究 (4) 的中心流形来确定.

不妨设中心流形为:

$$W^c(0) = \{(u, v, t) \in R^3 \mid v = h(u, t), h(0, 0) = 0, Dh(0, 0) = 0 \mid |u| < \delta \mid |t| < \varepsilon\}$$
 其中,  $\delta$  和  $\varepsilon$

充分小.

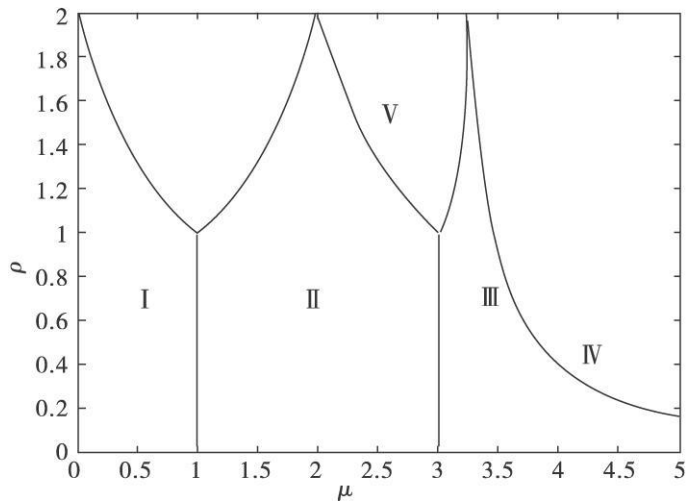


图 1 Kopel系统的稳定区域

Fig 1 Stable regions of Kopel system

假设中心流形具有如下的函数形式:

$$v = h(u, t) = a_1 u^2 + a_2 u t + a_3 t^2 + O(3),$$

其中,  $a_1, a_2, a_3$  为常数.

那么, 中心流形必须满足:

$$N(h(u, t)) \equiv h(Au + f_1(u, h(u, t), t)) - Bh(u, t) - f_2(u, h(u, t), t) = 0$$

$$\text{而 } A = -1, B = 3 - 2\rho$$

对于 (4), 由于我们仅考察次数低于 3 次的情形, 这样我们可以直接得到 (4) 限制到中心流形上的映射:

$$u \mapsto f(u, t) = -u - tu - (\rho + 2 + t)u^2 + O(3) \tag{5}$$

为了应用引理, 我们需要校验相应的非退化条件. 从而, 在不动点  $u = 0$  和临界参数值  $t = 0$  处, 要计算所有用到的导数值.

通过计算, 可以得到:

$$f_u''(0, 0) = -1, f_{uu}''(0, 0) = -2(\rho + 2), f_{uuu}'''(0, 0) = 0$$

把上述结果代入

$$C(0) = \frac{1}{4}(f_{uu}''(0, 0))^2 + \frac{1}{6}f_{uuu}'''(0, 0)$$

得到

$$C(0) = (\rho + 2)^2 \neq 0$$

因此, 当  $t > 0$  时, 平衡点  $(u, v) = (0, 0)$  开始失稳, 并且产生了倍周期分岔.

证毕.

### 3 混沌与最大李雅普诺夫指数

在这一部分, 我们通过计算最大李雅普诺夫指数<sup>[8]</sup> 来确定系统中混沌的存在. 在区域 IV 和区域 V, 系统存在混沌行为和周期行为. 分别固定参数  $\rho = 0.4$  和  $\rho = 1.2$  我们来观察系统的最大李雅普诺夫指数随参数  $\mu$  的变化情形见图 2-3

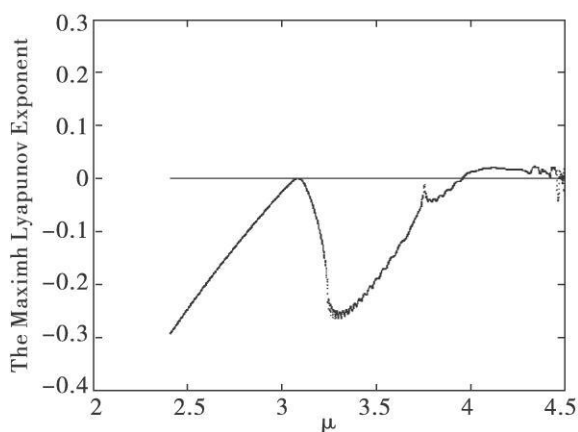


图 2  $\rho = 0.4$  时的最大李雅普诺夫指数

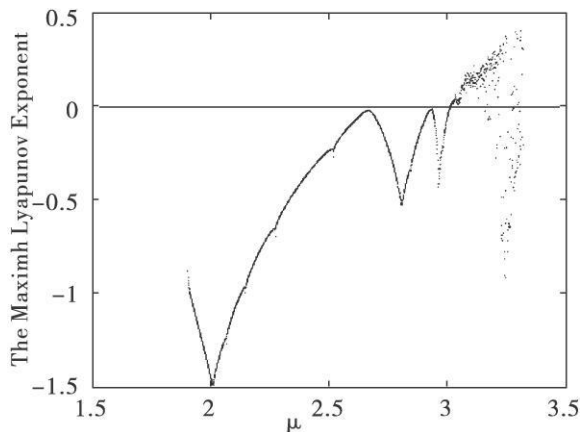


图 3  $\rho = 1.2$  时的最大李雅普诺夫指数

Fig 2 The maximum Lyapunov exponents when  $\rho = 0.4$  Fig 3 The maximum Lyapunov exponents when  $\rho = 1.2$

当  $\rho = 0.4$  时, 在参数  $\mu$  的一个相当大的区域内, 系统的最大李雅普诺夫指数都是小于 0 的, 这对应于不动点或者连续的闭的不变曲线和周期解, 直到  $\mu > 3.9559$  时, 最大李雅普诺夫指数开始大于 0, 这表明系统进入了混沌区.

当  $\rho = 1.2$  时, 系统的最大李雅普诺夫指数的情形与  $\rho = 0.4$  时相仿, 不同的是, 系统进入混沌区域所需的参数  $\mu$  的值要小. 由图 3 可以观察到, 当  $\mu > 3.0078$  时, 系统就进入了混沌区. 而且, 进入混沌区之后,

我们发现,最大李雅普诺夫指数出现了小于 0 的区域,这对应于混沌区的周期窗口。

#### 4 数值模拟

在这一部分,我们对该系统进行了数值模拟,数值模拟的结果验证了理论分析的正确性,即证实了当参数满足一定条件时系统中确实会出现混沌。

取  $\rho = 0.4$  图 4 展示了  $x$  对于参数  $\mu$  的分岔图。从图中我们观察到,随着参数  $\mu$  的增大,稳定的不动点  $O(0,0)$  在  $\mu = 1$  时开始失稳,同时出现了一个新的稳定的不动点  $O_1(1 - \frac{1}{\mu}, 1 - \frac{1}{\mu})$ 。而当  $\mu$  继续增大到 3.9559 时,系统中就出现了奇异的混沌现象。

令  $\rho = 1.2$  由图 5 我们可以观察到,当  $\mu = 2.6605$  时,系统发生了倍周期分岔,这与上述的理论分析是一致的。在  $\mu = 2.9291$  时,系统发生了第 2 次倍周期分岔。当  $\mu$  继续增大到 3.0078 时,系统的 4 个稳定的不动点同时失去稳定性,并且导致系统最终走向了混沌。

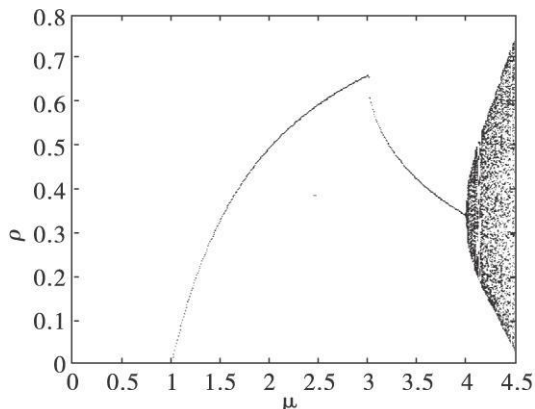


图 4  $\rho = 0.4$  时的分岔图

Fig 4 The bifurcation diagram when  $\rho = 0.4$

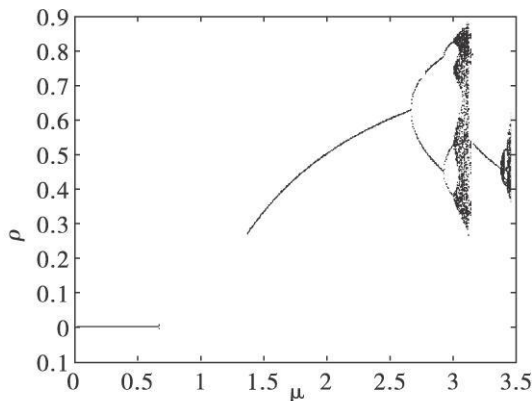


图 5  $\rho = 1.2$  时的分岔图

Fig 5 The bifurcation diagram when  $\rho = 1.2$

#### 5 结束语

混沌是非线性系统所特有的一个重要特征。然而,从理论上阐述某个系统会产生混沌以及通过什么方式走向混沌是一件比较困难的事情。论文在 Agiza 研究的基础上,详细讨论了 Kopel 系统的混沌行为,给出了该系统产生倍周期分岔的参数条件,并指出系统会通过倍周期分岔的方式走向混沌。最后,利用 Matlab 对该系统进行了数值模拟,数值模拟的结果验证了理论分析的正确性。

#### 参考文献:

- [1] 郝柏林. 分岔、混沌、奇怪吸引子、湍流及其他 [J]. 物理学进展, 1983 3(3): 329-416
- [2] Strogatz Steven H. Non linear dynamics and chaos[M]. Westview Press 1994. 136-137
- [3] Kopel M. Simple and complex adjustment dynamics in coumot duopoly mode [J]. Chaos Soliton&Fractals 1996, 7(12): 2031-2048
- [4] Jing Z J, Chang Y, Guo B L. Bifurcation and chaos in discrete fitzhugh-nagumo system [J]. Chaos, Solitons&Fractals 2004, 21(3): 701-70
- [5] Jing Z J, Yang J P. Bifurcation and Chaos in Discrete-time Predator-Prey System [J]. Chaos Soliton&Fractals 2006, 27(1): 259-77.
- [6] Agiza H N. On the analysis of stability, bifurcation, chaos and chaos control of kopel map [J]. Chaos, Soliton&Fractals 1999 10(11): 1909-1916
- [7] Kuznetsov Y A. Elements of applied bifurcation theory[M]. New York Springer-Verlag 1998
- [8] Guckenheimer J, Holmes P. Non linear oscillations dynamical systems and bifurcations of vector fields[M]. New York: Springer-Verlag 1997