第30卷 第1期　　昆明理工大学学报(理工版)　　Vol. 30 No. 1
2005年2月　　Journal of Kunming University of Science and Technology (Science and Technology)　　Feb. 2005

一类非线性发展方程的抛物线解和扭波解

黎　明
(曲靖师范学院 数学系,云南 曲靖　655000)

摘要: 根据平面动力系统的分支理论,在平面动力系统具有两个平衡点的条件下,求出了它的抛物线解,由抛物线解的存在性,在不同的参数条件下,得到了一类非线性发展方程的6类扭波解的精确参数表示.

关键词: 扭波解; 非线性发展方程; 抛物线解
中图分类号: O175.2　　文献标识码: A　　文章编号: 1007-855X(2005)01-0111-04

Kink Wave and Parabola Solution to a Class of Nonlinear Evolution Equation

LI Ming
(Dept of Mathematics, Qujing Normal College, Qujing, Yunnan 655000, Chian)

Abstract: By finding parabola solutions to a planar dynamical systems connecting two equilibrium points, the existence of the kink wave solutions and their exact parametric representations are obtained for a Type of Nonlinear Evolution Equation. Explicit parametric conditions to guarantee the existence of the above solutions are given.

Key words: kink wave solution; nonlinear evolution equation; parabola solution

0 引 言

文[1]利用双曲函数法讨论了一类非线性发展方程

$$u_t+\alpha u_x+buu_x+cu_{xx}+du_{xxx}=0 \tag{1}$$

的精确行波解. 我们知道(1)式包含许多著名的方程, 如KdV方程, Burgers方程, Kdv-Burgers方程所以讨论(1)式的行波解十分有意义. 文中进一步将方程(1)推广为[2~4]:

$$u_t+au_x+bu^pu_x+eu^{2p}u_x+cu_{xx}+du_{xxx}=0, \tag{2}$$

其中a, b, c, d, e, p为参数, 且$p>0$. 我们利用平面动力系统理论, 来讨论方程(2)的抛物线解和扭波解.

1 方程(2)抛物线解的存在性

我们作变换

$u(x,t)=u(x-\lambda t)=u(\zeta)$, 这里 λ是波速, 再令 $u(\zeta)=(\phi(\zeta))^{\frac{1}{p}}$. 代入方程(2)得

$$\phi\phi''+\frac{c}{d}\phi\phi'+\frac{1-p}{p}(\phi')^2+\frac{p\phi^2}{d}[(a-\lambda)+\frac{b}{p+1}\phi+\frac{e}{2p+1}\phi^2]=0 \tag{3}$$

我们假设 $a\neq\lambda$, $d>0$, c, b, e 为参数.

令 $$\frac{d\phi}{d\xi}=y,\ \frac{dy}{d\xi}=-\frac{1}{\phi}[\frac{c}{d}\phi y+\frac{1-p}{p}y^2+\frac{p\phi^2}{d}((a-\lambda)+\frac{b}{p+1}\phi+\frac{e}{2p+1}\phi^2)]. \tag{4}$$

再令 $d\xi=\phi d\eta$, 上式变为具有相同拓扑相图的动力系统

收稿日期: 2004-10-18. 基金项目: 曲靖师范学院科研立项资助课题(项目编号: 0211901).
第一作者简介: 黎明(1957~), 男, 副教授. 主要研究方向: 微分方程. **E-mail:** liming570117@yahoo.com.cn

$$\frac{d\phi}{d\eta} = y\phi,$$

$$\frac{dy}{d\eta} = -\left[\frac{c}{d}\phi y + \frac{1-p}{p}y^2 + \frac{p\phi^2}{d}\left((a-\lambda) + \frac{b}{p+1}\phi + \frac{e}{2p+1}\phi^2\right)\right] \tag{5}$$

下面我们来讨论方程(5)的抛物线解.

假定对于$\xi \in (-\infty, \infty)$和$\lim_{\xi\to-\infty}\phi(\xi) = a$, $\lim_{\xi\to\infty}\phi(\xi) = b$, $u(x,t) = \phi(\xi)$是方程(2)的连续解, 众所周知, ①如果$a = b$, $u(x,t)$称为孤波解. ②如果$a \neq b$, $u(x,t)$称为扭子或反扭结解, 通常(2)的一个孤波解对应(5)的一个同宿轨, (2)的一个扭子(反扭子)对应(5)的异宿轨(连续轨道).

设$f(\phi) = \phi^2\left[(a-\lambda) + \frac{b}{p+1}\phi + \frac{e}{2p+1}\phi^2\right]$, (6)

我们来讨论它的零点:

$$\phi_0 = 0,\ \phi_1 = \frac{2p+1}{2e}\left(-\frac{b}{p+1} + \sqrt{\left(\frac{b}{p+1}\right)^2 - \frac{4e(a-\lambda)}{2p+1}}\right),\ \phi_2 = -\frac{2p+1}{2e}\left(\frac{b}{p+1} + \sqrt{\left(\frac{b}{p+1}\right)^2 - \frac{4e(a-\lambda)}{2p+q}}\right). \tag{7}$$

(Ⅰ) 若 $\Delta = \left(\frac{b}{p+1}\right)^2 - \frac{4e(a-\lambda)}{2p+1} > 0$. $e \neq 0$. 方程(6)有三个零点ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2.

(Ⅱ) 若 $\Delta = 0$, $e \neq 0$, 方程(6)有两个零点ϕ_0, $\phi_{12} = -\frac{(2p+1)b}{2e(p+1)}$.

(Ⅲ) 若 $e = 0$, $(a-\lambda)b \neq 0$, 方程(6)有两个零点ϕ_0, $\phi_\alpha = -\frac{(p+1)(a-\lambda)}{b}$.

(Ⅳ) 若 $b = 0$, $(a-\lambda)e < 0$, 方程(6)有三个零点ϕ_0, $\phi_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{(\lambda-a)(2p+1)}{e}}$.

于是, 方程(5)最多存在三个平衡点$O(0,0)$, $E_{1,2}(\phi_{1,2}, 0)$

注意直线$\phi = 0$是方程(5)的解. 另一方面, 方程(5)其他解都不可能穿过直线$\phi = 0$.

令$M(\phi_i, 0)$是方程(5)在平衡点$(\phi_i, 0)$的系数矩阵, 我们有

$$J(0,0) = \det M(0,0) = 0,\ \mathrm{Trace}\,M(\phi_{1,2}, 0) = -\frac{c}{d}\phi_{1,2}.$$

$$J(\phi_{1,2}, 0) = \det M(\phi_{1,2}, 0) = \frac{p}{d}\phi^1_{1,2},\left(2(a-\lambda) + \frac{3b}{p+1}\phi_{1,2} + \frac{4e}{2p+1}\phi^2_{1,2}\right)$$

由平面动力系统理论知, 平面动力系统(5)在平衡点$(\phi_i, 0)$ $(i = 1, 2)$, 若满足$J < 0$, 平衡点是鞍点; 若$J > 0$, $(\mathrm{Trace}(M(\phi_i, 0)))^2 - 4J(\phi_i, 0) > 0(< 0)$, 那么平衡点是结点(焦点); 若$J = 0$且平衡点的指标是0, 平衡点是尖点. 当$a \neq \lambda$时, 平衡点$(0, 0)$是尖点.

我们假设

即$J(\phi_i, 0) > 0$,

$$(\mathrm{Trace}(M(\phi_i, 0)))^2 - 4J(\phi_i, 0) = \phi_i^2\left[\left(\frac{c}{d}\right)^2 - 4\frac{p}{d}\left((2(a-\lambda) + \frac{3b}{p+1}\phi_i + \frac{4e}{2p+1}\phi_i^2\right)\right] > 0,$$

即不讨论方程(5)有焦点的情况. 如果$\phi_1\phi_2 > 0$, 在$(0,0)$与$(\phi_i, 0)$, $i = 1, 2$或$(\phi_1, 0)$与$(\phi_2, 0)$之间存在一条代数连续曲线.

由上面的讨论, 我们有下面的结论:

1) 若$e > 0$, $b > 0$, $a > \lambda$, 我们有$\phi_2 < \phi_1 < 0$, 则$E_1(\phi_1, 0)$是鞍点, $E_2(\phi_2, 0)$是结点.

2) 若$e > 0$, $b < 0$, $a > \lambda$, 我们有$0 < \phi_2 < \phi_1$, 则$E_2(\phi_2, 0)$是鞍点, $E_1(\phi_1, 0)$是结点.

3) 若$e > 0$, $b \neq 0$, $a < \lambda$, 我们有$\phi_2 < 0 < \phi_1$, 则$E_{1,2}(\phi_{1,2}, 0)$是结点.

4) 若$e < 0$, $b > 0$, $a < \lambda$, 我们有$0 < \phi_2 < \phi_1$, 则$E_1(\phi_1, 0)$是鞍点, $E_2(\phi_2, 0)$是结点.

5) 若$e < 0$, $b < 0$, $a < \lambda$, 我们有$\phi_2 < \phi_1 < 0$, 则$E_1(\phi_1, 0)$是鞍点, $E_2(\phi_2, 0)$是鞍点.

6) 若$e < 0$, $b \neq 0$, $a > \lambda$, 我们有$\phi_2 < 0 < \phi_1$, 则$E_{1,2}(\phi_{1,2}, 0)$是鞍点.

7) 若$e = 0$, $b(a-\lambda) > 0$, 我们有$\phi_\alpha < 0$, 当$b > 0(< 0)$, 则$E_1(\phi_a, 0)$是鞍点(结点); 若$e = 0$, $b(a-\lambda) < 0$, 我们有$\phi_\alpha > 0$, 当$b > 0(< 0)$, 则$E_1(\phi_a, 0)$是结点(鞍点).

8) 若 $b=0$, $e(a-\lambda)<0$, 我们有 $\phi_2<0<\phi_1$, $\phi_2=-\phi_1$. 当 $e>0(<0)$, 则 $E(\pm\phi_1,0)$ 是结点(鞍点).

现在我们讨论方程(5) 在上面 1 ~ 8 种情况下具有形式

$$y=A\phi(\phi-\phi_i),\ i=1,2. \tag{8}$$

的抛物线解; 对于上面的 1, 2, 4, 5 四种情况具有形式

$$y=B(\phi_1-\phi)(\phi-\phi_2) \tag{9}$$

的抛物线解, 其中 A, B 是待定的参数.

首先我们假设 $e\neq 0$, $\Delta=\left(\frac{b}{p+1}\right)^2-\frac{4e(a-\lambda)}{2p+1}\geq 0$, 由方程(5), 我们有

$$\begin{aligned} y\phi\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi} &= -\left[\frac{c}{d}\phi y+\frac{1-p}{p}y^2+\frac{p\phi^2}{d}\left((a-\lambda)+\frac{b}{p+1}\phi+\frac{e}{2p+1}\phi^2\right)\right] \\ &= -\left[\frac{c}{d}\phi y+\frac{1-p}{p}y^2+\frac{p\phi^2}{d}\left((a-\lambda)+\frac{p}{d}\frac{e}{2p+1}\phi^2(\phi-\phi_1)(\phi-\phi_2)\right)\right]. \end{aligned} \tag{10}$$

这里 ϕ_1, ϕ_2 由(7) 给出, 此时我们设方程(5) 有形如(8) 的抛物线解, 将(8) 代入(10), 我们有

$$A^2\phi(2\phi-\phi_i)+\frac{Ac}{d}\phi+\frac{1-p}{p}A^2\phi(\phi-\phi_i)+\frac{p}{d}\frac{e}{2p+1}\phi(\phi-\phi_i)=0 \tag{11}$$

这里 $i=1$, $j=2$ 或 $i=2$, $j=1$, 比较方程两边的系数得

$$A^2\phi_i\left(1+\frac{1-p}{p}\right)-\frac{Ac}{d}+\frac{p}{d}\frac{e}{2p+1}\phi_j=0.\quad A^2\left(2+\frac{1-p}{p}\right)+\frac{p}{d}\frac{e}{2p+1}=0 \tag{12}$$

当 $c\neq 0$, 解方程我们有

$$A=\frac{pe[(p+1)\phi_j-\phi_i]}{2c(p+1)(2p+1)}$$

当 $i=1, j=2$ 时, $A=A_1=\dfrac{-p[bp+(p+1)(p+2)\sqrt{\Delta}]}{2c(p+1)^2}$ (13)

当 $i=2, j=1$ 时, $A=A_2=\dfrac{-p[bp-(p+1)(p+2)\sqrt{\Delta}]}{2c(p+1)^2}$ (14)

特别地, 当 $\Delta=0$, $be\neq 0$ 时, 我们有

$$\phi_1=\phi_2=\phi_{12}=\frac{-(2p+1)b}{2e(p+1)},\ \text{则}\ A=A_3=\frac{-p^2b}{2c(p+1)^2}. \tag{15}$$

若 $b=0$, $(a-\lambda)e<0$, $\phi_{1,2}=\pm\sqrt{\dfrac{(\lambda-a)(2p+1)}{e}}$, 则

$$A=A_4=\frac{-p(p+2)\sqrt{\dfrac{(\lambda-a)e}{2p+1}}}{c(p+1)}. \tag{16}$$

$$A=A_5=\frac{p(p+2)\sqrt{\dfrac{(\lambda-a)e}{2p+1}}}{c(p+1)}. \tag{17}$$

其次, 我们假设 $e=0$, $b(a-\lambda)\neq 0$, $\phi_a=\dfrac{(\lambda-a)(p+1)}{b}$. 此时我们设方程(5) 有形如

$$y=A_6\phi(\phi-\phi_a) \tag{18}$$

的抛物线解, 将(18) 代入(10) 有

$$A_6^2\phi(2\phi-\phi_a)+A_6\left(\frac{c}{d}\phi\right)+\frac{1-p}{p}A_6^2\phi(\phi-\phi_a)+\frac{p}{d}\frac{b}{p+1}\phi=0, \tag{19}$$

比较方程(19) 两边的系数得

$$A_6^2\left(\phi_a+\frac{1-p}{p}\phi_a\right)-\frac{c}{d}A_6-\frac{p}{d}\frac{b}{p+1}=0,\ \left(2+\frac{1-p}{p}\right)A_6^2=0. \tag{20}$$

$$A=A_6=\frac{-pb}{c(p+1)}. \tag{21}$$

我们现在研究的情况 1, 2, 4, 5 条件下, 方程(5) 的抛物线解.

当 $e\neq 0$, $\Delta=\left(\frac{b}{p+1}\right)^2-\frac{4e(a-\lambda)}{2p+1}>0$, 由方程(5), 我们有

$$y\phi\frac{dy}{d\phi}=-\left[\frac{c}{d}\phi y+\frac{1-p}{p}y^2+\frac{p\phi^2}{d}((a-\lambda)-\frac{p}{d}\frac{e}{2p+1}\phi^2(\phi_1-\phi)(\phi-\phi_2)\right].\quad(22)$$

这里 ϕ_1, ϕ_2 由(7) 给出, 此时我们设方程(5) 有形如(9) 的抛物线解, 将(9) 代入(22), 我们有 $B^2\phi(\phi_1+\phi_2-2\phi)+\frac{Bc}{d}\phi+\frac{1-p}{p}B^2(\phi_1-\phi)(\phi-\phi_2)-\frac{p}{d}\frac{e}{2p+1}\phi^2=0$ (23)

比较方程两边的系数得

$$\frac{1-p}{p}\phi_1\phi_2=0,B^2(\phi_1+\phi_2)(1+\frac{1-p}{p})+\frac{c}{d}B=0,(2+\frac{1-p}{p})B^2+\frac{p}{d}\frac{e}{2p+1}=0,\quad(24)$$

我们推得 $p=1,B=-\frac{pb}{2c(p+1)}$. (25)

2 方程(2) 的扭波解

根据上面的讨论, 我们得到含参数表示的扭波解, 有下面的结论

①若 $e>0,b\neq0,\lambda-a>0,p>0,p\neq1,\Delta=(\frac{b}{p+1})^2-\frac{4e(a-\lambda)}{2p+1}>0,\phi_1>0>\phi_2$, 方程(2) 有扭波解

$$u(x,t)=u(x-\lambda t)=(\frac{1}{2}\phi_1-\frac{1}{2}\phi_1\tanh(\frac{A_1\phi_1}{2}(x-\lambda t))^{\frac{1}{p}}.$$

②若 $e<0,b>0,\lambda-a>0,p>0,p\neq1,\Delta=(\frac{b}{p+1})^2-\frac{4e(a-\lambda)}{2p+1}>0,\phi_1>\phi_2>0$, 方程(2) 有两类扭波解

$$u(x,t)=u(x-\lambda t)=(\frac{1}{2}\phi_2-\frac{1}{2}\phi_2\tanh(\frac{A_2\phi_2}{2}(x-\lambda t))^{\frac{1}{p}}$$

若 $p=1$, 它也有扭波解

$$u(x,t)=u(x-\lambda t)=-\frac{3b}{4e}+\frac{3\sqrt{\Delta}}{2e}\tanh(\frac{3b}{8c(-e)}(x-\lambda t)).$$

这里 $\Delta=\frac{1}{12}(3b^2+16e(\lambda-a))$, 当 $\Delta=0$ 时 $\phi_1=\phi_2=\phi_{12}=\frac{-b(2p+1)}{2e(p+1)}$, 那么对 $\lambda-a>0,p>0,p\neq1$ 且满足 $\Delta=0$, 方程(2) 有扭波解

$$u(x,t)=u(x-\lambda t)=(\frac{1}{2}\phi_{12}-\frac{1}{2}\phi_{12}\tanh(\frac{A_3\phi_{12}}{2}(x-\lambda t))^{\frac{1}{p}}.$$

③若 $b=0,e>0$, 我们有 $\phi_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{(\lambda-a)(2p+1)}{e}}$. 那么对 $\lambda-a>0,p>0,p\neq1$, 方程(2) 有扭波解

$$u(x,t)=u(x-\lambda t)=(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda-a)(2p+1)}{e}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda-a)(2p+1)}{e}}\tanh(\frac{A_4\sqrt{\frac{(\lambda-a)(2p+1)}{e}}}{2}(x-\lambda t))^{\frac{1}{p}}.$$

④若 $b>0,e=0$, 我们有 $\phi_a=\frac{(\lambda-a)(p+1)}{b}$. 那么对 $\lambda-a>0,p>0,p\neq1$, 方程(2) 有扭波解

$$u(x,t)=u(x-\lambda t)=(\frac{(\lambda-a)(p+1)}{2b}+\frac{(\lambda-a)(p+1)}{2b}\tanh(\frac{P(\lambda-a)}{2c}(x-\lambda t)^{\frac{1}{p}}.$$

以上我们得到了方程(2) 在不同参数条件下的六类扭波解.

参考文献:

[1] 聂小兵. 双函数法及一类非线性发展方程的精确行波解[J]. 应用数学, 2003, 16(1): 109~115.

[2] Parkes E J, Duffy B R. Travelling Wave Solutions to a Compound KdV – Burgersequation[J]. Phycics. Letter A, 1997, 229: 217~220.

[3] ZHANG Weiguo, Qianshun Chang, Baoguo Jiang. Explict Exact Solitary – wave Solutions Forcompound KdV – type and Compound KdV – Burgers Equation with Nolinear Terms of and Order[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2002, 13: 311~319.

[4] FENG Zhaosheng. A Note on Explict Exact Solutions to the Compound Kdv Equation[J]. Phycics. Letter A, 2003, 312: 65~71.