第28卷 第2期 昆明理工大学学报(理工版) Vol.28 No.2
2003年4月 Journal of Kunming University of Science and Technology (Science and Technology) Apr. 2003

严格伪压缩映象的不动点逼近及收敛速率估计

何 昌[1], 施 冰[1], 孙昭洪[2]
(1. 大理学院, 云南 大理 671000; 2. 玉溪师范学院, 云南 玉溪 653100)

摘要: 在Banach空间中证明了Ishikawa迭代序列强收敛到任意闭凸集上严格伪压缩映象的不动点,并得到更为精确的收敛速率估计.本文结果发展和改进了引文[1,2]的相关结果.

关键词: 严格伪压缩映象;L-Lipschitz映象;Ishikawa迭代序列;Mann迭代序列
中图分类号:O177.91 **文献标识码**:A **文章编号**:1007-855X(2003)02-0151-03

On the Approximation Problem for Fixed Points of Strictly Pseudocontractive Mappings and Convergence Rate Estimate

HE Chang· SHI Bing[1], SUN Zhao-hong[2]
(1. Da Li College, Dali 671000, China; 2. Yu Xi Normal College, Yuxi 653100, China)

Abstract: It proves in a Banach space that Ishikawa iterative sequence strongly converges at the fixed point of strictly pseudocontractive mappings on arbitrary closed, convex sets. The argument provides more accurate convergence rate estimate. The results in this paper develop and improve the corresponding results of papers[1,2].

Key words: strictly pseudocontractive mapping; L-Lipschitzian mapping; Ishikawa iterative sequence; mann iterative sequence

0 引言

设 X 是Banach空间,X^* 是 X 的对偶空间,$J:X\to 2^{X^*}$ 是由下式定义的正规对偶映象:

$$J(x)=\{f\in E^*,\mathrm{Re}<x,f>=\|x\|\,\|f\|,\|x\|=\|f\|\},\forall x\in X$$

定义 设 $T:D(T)\subset X\to X$ 是一映象.

(1) T 称为严格伪压缩的,如果存在 $t>1$,使得对 $\forall x,y\in D(T)$ 及 $r>0$,有

$$\|x-y\|\leqslant\|(1+r)(x-y)-rt(Tx-Ty)\|$$

(2) T 称为强增生的,如果存在正整数 k 使得对 $\forall x,y\in D(T)$,有

$$\langle Tx-Ty,j(x-y)\rangle\geqslant k\|x-y\|^2 \tag{1}$$

其中 $j(x-y)\in J(x-y)$.

不失一般性,我们设 $k\in(0,1)$,并且易见(1)蕴含下面的不等式:

$$\|x-y\|\leqslant\|x-y+r[(T-kI)x-(T-kI)y]\|$$

其中 I 为恒等映象.

由此易知:如果 X 是Banach空间,$K\subset X$,则 $T:K\to K$ 是严格伪压缩映象的充分必要条件是 $(I-T)$ 是强增生的,即对 $\forall x,y\in K$ 及 $r>0$,下面不等式成立:

$$\|x-y\|\leqslant\|x-y+r[(I-T-kI)x-(I-T-kI)y]\| \tag{2}$$

其中 $k=\dfrac{t-1}{t}\in(0,1)$.

下面的定理是本文的主要结果:

定理 设 X 是Banach空间,K 是 X 的非空闭凸子集,$T:K\to K$ 是L-Lipschitz($L\geqslant 1$)的严格伪压

收稿日期:2002-10-15; 基金项目:云南省自然科学基金资助(项目编号:2002A0058M).
第一作者简介:何昌(1955~),男,副教授;主要研究方向:非线性泛函分析.

缩映象,对任意给定的 $x_1 \in K$, $\{x_n\} \subset K$ 是由下式定义的 Ishikawa 迭代序列:

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n \end{cases} \tag{3}$$

其中 $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ 是(0,]中的数列,如果 T 的不动点集 $F(T) \neq \Phi$,且 $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ 满足

$$\alpha_n \leqslant \frac{k}{2(4+4L+L^2)}; \quad \beta_n \leqslant \frac{\alpha_n}{L}$$

则 $\{x_n\}$ 强收敛到 T 的不动点 $q \in F(T)$,且 $F(T) = \{q\}$.

证明 由(3),我们有

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n+1} + \alpha_n x_n - \alpha_n T y_n \\ &= (1+\alpha_n)x_{n+1} + \alpha_n(I - T - kI)x_{n+1} - (2-k)\alpha_n x_{n+1} + \alpha_n x_n + \alpha_n(Tx_{n+1} - Ty_n) \\ &= (1+\alpha_n)x_{n+1} + \alpha_n(I - T - kI)x_{n+1} - (2-k)\alpha_n[(1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n] + \alpha_n x_n + \alpha_n(Tx_{n+1} - Ty_n) \\ &= (1+\alpha_n)x_{n+1} + \alpha_n(I - T - kI)x_{n+1} - (1-k)\alpha_n x_n + (2-k)\alpha_n^2(x_n - Ty_n) + \alpha_n(Tx_{n+1} - Ty_n) \end{aligned}$$

因为 $Tq = q$,所以有

$$x_n - q = (1+\alpha_n)(x_{n+1} - q) + \alpha_n(I - T - kI)(x_{n+1} - q) - (1-k)\alpha_n(x_n - q) + (2-k)\alpha_n^2(x_n - Ty_n) + \alpha_n(Tx_{n+1} - Ty_n)$$

利用(2)式我们得到

$$\| x_n - q \| \geqslant (1+\alpha_n)\| x_{n+1} - q \| - (1-k)\alpha_n \| x_n - q \| - (2-k)\alpha_n^2 \| x_n - Ty_n \| - \alpha_n \| Tx_{n+1} - Ty_n \|$$

从而得

$$\| x_{n+1} - q \| \leqslant \frac{1+(1-k)\alpha_n}{1+\alpha_n}\| x_n - q \| + \frac{(2-k)\alpha_n^2}{1+\alpha_n}\| x_n - Ty_n \| + \frac{\alpha_n}{1+\alpha_n}\| Tx_{n+1} - Ty_n \| \tag{4}$$

由于

$$\| x_n - Ty_n \| \leqslant \| x_n - Tx_n \| + \| Tx_n - Ty_n \| \tag{5}$$

$$\| x_n - Ty_n \| \leqslant \| x_n - q \| + \| Tx_n - Tq \| = (L+1)\| x_n - q \| \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \| Tx_n - Ty_n \| &\leqslant L \| x_n - y_n \| = L \| x_n - (1-\beta_n)x_n - \beta_n T x_n \| \\ &= L\beta_n \| x_n - Tx_n \| \leqslant L(L+1)\beta_n \| x_n - q \| \end{aligned} \tag{7}$$

将(6),(7)代入(5)得

$$\| x_n - Ty_n \| \leqslant (L+1)(L\beta_n + 1)\| x_n - q \| \tag{8}$$

又因

$$\begin{aligned} \| Tx_{n+1} - Ty \| &\leqslant L \| x_{n+1} - y_n \| = L \| (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n - (1-\beta_n)x_n - \beta_n TX_n \| \\ &\leqslant L\{\alpha_n \| x_n - Ty_n \| + \beta_n \| x_n - Tx_n \| \} \\ &\leqslant L\{\alpha_n(L+1)(L\beta_n + 1)\| x_n - q \| + \beta_n(L+1)\| x_n - q \| \} \\ &= L(L+1)[(L\beta_n + 1)\alpha_n + \beta_n]\| x_n - q \| \end{aligned} \tag{9}$$

将(8)、(9)代入(4)得

$$\| x_{n+1} - q \| \leqslant x_n - q \| \{\frac{1+(1-k)\alpha_n}{1+\alpha_n} + \frac{(2-k)\alpha_n^2}{1+\alpha_n}(L+1)(L\beta_n+1) + \frac{\alpha_n}{1+\alpha_n}L(L+1)[(L\beta_n+1)\alpha_n + \beta_n]\} \tag{10}$$

$$:= e_n \| x_n - q \|$$

其中

$$e_n = \frac{1+(1-k)\alpha_n}{1+\alpha_n} + \frac{(2-k)\alpha_n^2}{1+\alpha_n}(L+1)(L\beta_n+1) + \frac{\alpha_n}{1+\alpha_n}L(L+1)[(L\beta_n+1)\alpha_n + \beta_n]$$

因为 $\frac{1}{1+\alpha_n} < 1 - \alpha_n + \alpha_n^2$,故

$$\frac{1+(1-k)\alpha_n}{1+\alpha_n} \leqslant [1+(1-k)\alpha_n](1-\alpha_n+\alpha_n^2) = 1 - k\alpha_n + \alpha_n^2 - (1-k)\alpha_n^2(1-\alpha_n)$$

$$< 1 - k\alpha_n + \alpha_n^2 \tag{11}$$

由(11)及定理对 α_n 和 β_n 的限制条件得到

$$e_n \leqslant 1 - \alpha_n k + \alpha_n^2[1 + (2 - k)(l + 1) + L(L + 1) + L + 1] \leqslant 1 - k\alpha_n + (4 + 4L + L^2)\alpha_n^2$$
$$\leqslant 1 - \frac{k^2}{2(4 + 4L + L^2)} + \frac{k^2}{4(4 + 4L + L^2)} = 1 - \frac{k^2}{4(4 + 4L + L^2)}$$
$$: = 1 - \lambda : = \rho$$

所以由(10)有 $\| x_{n+1} - q \| \leqslant \rho \| x_n - q \|$，从而得

$$\| x_{n+1} - q \| \leqslant \rho^n \| x_1 - q \| \tag{12}$$

因为 $0 < \lambda < 1$，从而有 $0 < \rho < 1$，于是由(12)知有 $\| x_{n+1} - q \| \to 0(n \to \infty)$. 即有

$$x_n \to q(n \to \infty)$$

并且由 x_1 在 K 中的任意性知 $F(T) = \{q\}$. 至此定理得证.

注：我们的定理不仅将文[1]讨论的 Mann 迭代序列推广到了 Ishikawa 迭代序列，还去掉了文[1]中要求 K 有界的条件. 另外，我们的逼近速率估计也包含文[1]中定理的结果作为推论，事实上只要在我们的(10)式中取 $\beta_n \equiv 0$，即可得到 $\rho = 1 - \dfrac{k^2}{4(3 + 3L + L^2)}$.

进一步，若令 $\beta_n \equiv 0$ 考虑 Mann 迭代，我们的定理也包含文[2]的结果作为推论，即有

推论　设 X、K、T、$F(T)$ 满足定理条件，$x_n \subset K$ 是由下式定义的 Mann 迭代序列：

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n Tx_n, x_1 \in k \tag{13}$$

如果对某个 $\eta \in (0, k)$，数列 $\{\alpha_n\} \subset (0,1]$ 满足如下条件：

$$\alpha_n \leqslant \frac{k - \eta}{(L + 1)(2 + L - k)}, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

则 $x_n \to q \in F(T)$，且存在 $\{\delta_n\}$，其中 $\delta_n \geqslant \dfrac{\eta}{1 + k}\alpha_n$，使得

$$\| x_{n+1} - q \| \leqslant \prod\nolimits_{j=i}^{n}(1 - \delta_j) \| x_1 - q \|$$

证明　在我们的定理证明的(10)中令 $\beta_= 0$ 得

$$\| x_{n+1} - q \| \leqslant \frac{1 + (1 - k)\alpha_n + (2 - k)(L + 1)\alpha_n^2 + L(L + 1)\alpha_n^2}{1 + \alpha_n} \| x_n - q \|$$
$$: = \frac{A_n}{B_n} \| x_n - q \|$$

令 $\delta_n = 1 - \dfrac{A_n}{B_n}$，则

$$\delta_n = \frac{k\alpha_n - (L + 1)(2 + L - k)\alpha_n^2}{1 + \alpha_n} \geqslant \frac{\alpha_n}{1 + \alpha_n} \geqslant \frac{\eta}{1 + k}\alpha_n$$

于是 $\| x_{n+1} - q \| \leqslant \dfrac{A_n}{B_n} \| x_n - q \| = (1 - \delta_n) \| x_n - q \| \leqslant (1 - \delta_n)(1 - \delta_{n-1}) \| x_{n-1} - q \|$

$$\overset{KK}{\leqslant} \prod\nolimits_{j=1}^{n}(1 - \delta_j) \| x_1 - q \|$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n \geqslant \dfrac{n}{1 + k}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \infty$，所以 $\prod_{j=1}^{n}(1 - \delta_j) = 0$，于是证到 $x_n \to q(n \to \infty)$.

参考文献：

[1] Liu Liwei. Approximation of Fixed Points of a Strictly Pseudocontractive Mapping[J]. Proc. Amer. Math. Soc. 1997, 12: 1363 ~ 1366.

[2] Sastry K P R and Babu G V R. Approximation of fixed points of a strictly pseudocontractive mapping on arbitrary closed, closed sets in a Banach space[J]. Proc. Amer. Math. Soc. 2000, 128: 2907 ~ 2909.