

doi 10. 3969/j issn. 1007 - 855x 2009. 04. 025

# 信息概念格的属性特征研究

刘雅丽,刘文奇

(昆明理工大学 理学院,云南 昆明 650093)

**摘要:** 基于信息概念格,给出了信息形式背景下协调集的判定定理.同时区分了在信息概念格属性约简中起不同作用的属性,给出了各类属性的特征和判别方法.

**关键词:** 信息形式;概念格;协调集;属性特征

**中图分类号:** O236 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007 - 855X(2009)04 - 0117 - 04

## A ttribute Characteristics of Information Concept Lattice

L IU Ya-li, L IU W en-qi

(Faculty of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, China)

**Abstract:** Judgment theorems of consistent set in information formal context based on information concept lattices are dealt with in this paper. At the same time, different kinds of attributes which play different roles during attribute reduction in information concept lattices are distinguished. Characteristics and judgment theorems of all kinds of attributes are also given.

**Key words:** information formal; concept lattice; consistent set; characteristics of attribute

### 0 引言

1982年,德国的 Wille教授提出概念格的数学理论<sup>[1]</sup>,近年来,概念格理论被认为是数据分析的有力工具,作为概念格形成所依赖的形式背景正是这些数据的体现方式.然而,起源于单值属性形式背景的经典概念格理论在某种程度上限制了不同类型的数据的存在.在文献[2]中张文修等人讨论了经典概念格的属性约简理论与方法,论文基于信息概念格研究了概念格协调集的判定及属性特征,使经典概念格得到了发展.

### 1 基本概念

设  $(U, A, F, \cdot)$  为信息形式背景<sup>[3]</sup>,其中  $U$  为非空有限对象集,  $A$  为有限非空的属性集,  $F$  是  $U$  与  $A$  的关系集,  $F = \{F_a \mid U \times V_a, \forall a \in A\}$ ,其中  $V_a$  是有限集,称为属性  $a$  的值域,  $V_a = \{(a_i, v_{ij}) \mid a_i \in A, i = 1, 2, \dots, m; v_{ij} \in V_a - \{0\}\}$ ,对于  $X \subseteq U, Y \subseteq A$ ,定义运算  $X^* = \{(a_i, v_{ij}) \mid X \subseteq \{x \in U \mid F_{a_i}(x) = v_{ij}\}\}$ ,  $Y^* = \{x \in U \mid Y \subseteq \{(a, F_a(x)) \mid F_a(x) \neq 0, a \in A\}\}$ ,则有以下基本性质:

- (1)  $X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow X_2^* \subseteq X_1^*, Y_1 \subseteq Y_2 \Rightarrow Y_2^* \subseteq Y_1^*$ ; (2)  $X \subseteq X^{**}, Y \subseteq Y^{**}$ ;
- (3)  $X^* = X^{***}, Y^* = Y^{***}$ ; (4)  $(X_1 \cup X_2)^* = X_1^* \cap X_2^*, (Y_1 \cap Y_2)^* = Y_1^* \cup Y_2^*$ ;
- (5)  $(X_1 \cup X_2)^* \supseteq X_1^* \cap X_2^*, (Y_1 \cap Y_2)^* \supseteq Y_1^* \cup Y_2^*$ ;
- (6)  $(X^{**}, X^*)$  和  $(Y^{**}, Y^*)$  是信息概念.

**定义 1.1**<sup>[3]</sup> 设  $(U, A, F, \cdot)$  为信息形式背景,如果一个二元组  $(X, Y)$  满足  $X^* = Y$  且  $X = Y^*$ ,则称

收稿日期: 2008 - 11 - 06 基金项目: 云南省教育厅科学研究基金项目 (项目编号: 2006L00006).

作者简介: 刘雅丽 (1980 - ),女,在读硕士研究生.主要研究方向: 概念格,模糊集,粗糙集.

$(X, Y)$  是一个信息概念. 其中  $X$  称为概念的外延,  $Y$  称为概念的内涵.

用  $L(U, A, F)$  表示信息形式背景  $(U, A, F)$  的概念全体.  $L(U, A, F)$  上的偏序关系 “ $\leq$ ” 定义为:  $(X_1, Y_1) \leq (X_2, Y_2) \Leftrightarrow X_1 \subseteq X_2 (Y_1 \supseteq Y_2)$ , 称  $L(U, A, F)$  为信息概念格. 其中, 上下确界的定义是:

$$(X_1, Y_1) \vee (X_2, Y_2) = (X_1 \cup X_2, (Y_1 \cap Y_2)^{**})$$

$$(X_1, Y_1) \wedge (X_2, Y_2) = ((X_1 \cap X_2)^{**}, Y_1 \cap Y_2)$$

**定义 1.2**<sup>[3]</sup> 设  $L(U, A_1, F_1)$  和  $L(U, A_2, F_2)$  是 2 个信息概念格, 如果  $\forall (X, Y) \in L(U, A_2, F_2)$ , 存在  $(X, Y) \in L(U, A_1, F_1)$  使得  $X = X$ , 则称  $L(U, A_1, F_1)$  细于  $L(U, A_2, F_2)$ , 记  $L(U, A_1, F_1) \leq L(U, A_2, F_2)$ .

若  $L(U, A_1, F_1) \leq L(U, A_2, F_2)$  且  $L(U, A_2, F_2) \leq L(U, A_1, F_1)$ , 那么称 2 个信息概念格同构, 记作:  $L(U, A_1, F_1) \cong L(U, A_2, F_2)$ .

在信息形式背景  $(U, A, F)$  下,  $B \subseteq A$ , 令  $F_B = \{F_a \mid F_a: U \rightarrow V_a, a \in B\}$ , 那么  $(U, B, F_B)$  也是信息形式背景. 在  $(U, B, F_B)$  下运算  $X^{*B} = X^*$ .

**定义 1.3**<sup>[3]</sup> 设  $(U, A, F)$  为信息形式背景, 若存在属性集  $B \subseteq A$ , 使得  $L(U, B, F_B) \cong L(U, A, F)$ , 则称  $B$  为协调集; 进一步,  $\forall d \in B, L(U, B, F_{B-\{d\}}) \cong L(U, A, F)$  不成立, 则称  $B$  是约简.

**定理 1.1** 设  $(U, A, F)$  为信息形式背景,  $B \subseteq A, B \neq \emptyset$ , 则  $B$  是协调集  $\Leftrightarrow L(U, B, F_B) \leq L(U, A, F)$ .

**证明** 由文献 [3] 知,  $L(U, A, F) \leq L(U, B, F_B)$ , 又由定义 1.2 容易得到命题成立.

**定义 1.4** 设信息形式背景  $(U, A, F)$  的所有约简为  $\{B_i \mid B_i\}$  为约简,  $i = 1, \dots, m$ . 可将属性集  $A$  分为 3 类: 绝对必要属性  $b: b \in B_i$ ; 相对必要属性  $c: c \in B_i - B_j$ ; 绝对不必要属性:  $d: d \in A - B_i$ . 其中,  $c, d$  统称为不必要属性.

### 2 信息概念格协调集的判定定理

**定理 2.1** 设  $(U, A, F)$  为信息形式背景,  $B \subseteq A, B \neq \emptyset, B = \{b_i, v_{ij} \mid b_i \in B, i = 1, 2, \dots, m_1; v_{ij} \in V_{b_i} - \{0\}\}, E = A - B$ , 则  $B$  是协调集  $\Leftrightarrow \forall F \subseteq E, F \neq \emptyset, (F^{**} - E)^* = (F^{**} - B)^* = F^*$ .

**证明**  $(\Rightarrow)$   $B$  为协调集, 则  $L(U, B, F_B) \leq L(U, A, F)$ . 由于  $\forall F \subseteq E, F \neq \emptyset$ , 总有  $(F^*, F^{**}) \in L(U, A, F)$ , 因而存在  $G \subseteq B, (F^*, G) \in L(U, B, F_B)$  从而  $G^* = F^*$  又  $G = F^{**B} = F^{**} - B$ , 所以  $(F^{**} - E)^* = (F^{**} - B)^* = F^*$ .

$(\Leftarrow)$   $\forall (X, Y) \in L(U, A, F)$ , 下证  $(X, Y - B) \in L(U, B, F_B)$ .

首先,  $X^{*B} = X^* - B = Y - B$ , 只需证  $(Y - B)^* = X$ . 显然  $Y = Y - (B - E) = (Y - B) \cup (Y - E)$ , 则  $Y^* = (Y - B)^* \cup (Y - E)^*$ . 若  $Y - E = \emptyset$ , 则  $Y^* = (Y - B)^* = X$ . 若  $Y - E \neq \emptyset$ , 显然  $Y - E \subseteq Y$ , 所以  $(Y - E)^{**} \subseteq Y^{**} = X^* = Y$ ; 又  $Y - E \subseteq E$ , 由已知  $((Y - E)^{**} - B)^* = (Y - E)^* \supseteq (Y - B)^*$ , 所以  $Y^* = (Y - B)^* = X$ .

**定理 2.2** 设  $(U, A, F)$  为信息形式背景,  $B \subseteq A, B \neq \emptyset, B = \{b_i, v_{ij} \mid b_i \in B, i = 1, 2, \dots, m_1; v_{ij} \in V_{b_i} - \{0\}\}, E = A - B$ , 则  $B$  是协调集  $\Leftrightarrow \forall F \subseteq E, F \neq \emptyset, \exists G \subseteq B, G \neq \emptyset$ , 使  $G^* = F^*$ .

**证明**  $(\Rightarrow)$  由定理 2.1 即证

$(\Leftarrow)$  由  $G^* = F^*$ , 得  $G \subseteq G^{**} = F^{**}$ , 且  $G \subseteq B$ , 因而  $G \subseteq F^{**} - B, (F^{**} - B)^* \subseteq G^* = F^*$ , 又由于  $(F^{**} - B)^* \supseteq F^* - B^* \supseteq F^*$ , 所以  $(F^{**} - B)^* = F^*$ . 由定理 2.1,  $B$  是协调集.

**定理 2.3** 设  $(U, A, F)$  为信息形式背景,  $B \subseteq A, B \neq \emptyset, B = \{b_i, v_{ij} \mid b_i \in B, i = 1, 2, \dots, m_1; v_{ij} \in V_{b_i} - \{0\}\}, E = A - B$ , 则  $B$  是协调集  $\Leftrightarrow \forall (e_i, v_{ij}) \in E, \exists G \subseteq B, G \neq \emptyset$ , 使  $G^* = (e_i, v_{ij})^*$ .

**证明**  $(\Rightarrow)$  由定理 2.2 即证.

$(\Leftarrow)$   $\forall F \subseteq E, F \neq \emptyset$ , 记  $F = \{(e_k, v_{kt}) \mid (e_k, v_{kt}) \in E, k = 1, 2, \dots, m_2\}$ , 由已知  $\forall (e_k, v_{kt}) \in F \subseteq E, \exists G_k$

$\subseteq B, G_k \cap \emptyset, G_k^* = (e_k, v_{ek})^*$ . 则  $F^* = \bigcap_{k=2}^k (e_k, v_{k1})^* = \bigcap_{k=2}^k G_k^* = (\bigcap_{k=2}^k G_k)^*$ , 令  $G = \bigcap_{k=2}^k G_k$ , 则  $G \subseteq B$ ,  $G \cap \emptyset, G^* = F^*$ , 由定理 2.2, 知  $B$  是协调集.

**定理 2.4** 设  $(U, A, F)$  为信息形式背景,  $B \cong A, B \cap \emptyset, B = \{(b_i, v_{ij}) \mid b_i \in B, i = 1, 2, \dots, 1; v_{ij} \in V_{b_i} - \{0\}\}$ ,  $E = \bigcap_{i=1}^i B$ , 则  $B$  是协调集  $\Leftrightarrow \forall (e_i, v_{ij}) \in E, ((e_i, v_{ij})^{**} - E)^* = ((e_i, v_{ij})^{**} \cap B)^* = (e_i, v_{ij})^*$ .

**证明**  $(\Rightarrow)$  由定理 2.1 即证.

$(\Leftarrow)$  记  $G = (e_i, v_{ij})^{**} \cap B$ , 则  $G \subseteq B, G \cap \emptyset, G^* = (e_i, v_{ij})^*$ , 由定理 2.3, 知  $B$  是协调集.

### 3 信息概念格的属性特征

**定理 3.1** 设  $(U, A, F)$  为信息形式背景,  $\forall a_k \in A, k \in \{1, 2, \dots, m\}, B = \{(a_i, v_{ij}) \mid a_i \in A, i = 1, 2, \dots, m, v_{ij} \in V_{a_i} - \{0\}\}$ , 记  $M_{(a_k, v_{kj})} = \{(m_i, v_{ij}) \mid (m_i, v_{ij}) \in B, (m_i, v_{ij})^* \supseteq (a_k, v_{kj})^*\}$ , 下列命题成立:

- 1)  $a_k$  是核心属性  $\Leftrightarrow \exists (a_k, v_{kj}) \in B$ , 使  $((a_k, v_{kj})^{**} - \{(a_k, v_{kj})\})^* = (a_k, v_{kj})^*$ ;
- 2)  $a_k$  是绝对不必要属性  $\Leftrightarrow \forall (a_k, v_{kj}) \in B, ((a_k, v_{kj})^{**} - \{(a_k, v_{kj})\})^* = (a_k, v_{kj})^*$  且  $\exists M_{(a_k, v_{kj})}^* \subseteq B$ , 使  $M_{(a_k, v_{kj})}^* = (a_k, v_{kj})^*$ ;
- 3)  $a_k$  是相对必要属性  $\Leftrightarrow \forall (a_k, v_{kj}) \in B, ((a_k, v_{kj})^{**} - \{(a_k, v_{kj})\})^* = (a_k, v_{kj})^*$ , 且  $M_{(a_k, v_{kj})}^* \subseteq B$ ,  $(a_k, v_{kj})^* \subseteq M_{(a_k, v_{kj})}^*$ .

**证明** 1)  $a_k$  是不必要属性  $\Leftrightarrow A - \{a_k\}$  为协调集  $\Leftrightarrow \forall (a_k, v_{kj}) \in B, ((a_k, v_{kj})^{**} - \{(a_k, v_{kj})\})^* = (a_k, v_{kj})^*$ , 所以  $a_k$  是核心属性  $\Leftrightarrow a_k$  不是不必要属性  $\Leftrightarrow \exists (a_k, v_{kj}) \in B, ((a_k, v_{kj})^{**} - \{(a_k, v_{kj})\})^* = (a_k, v_{kj})^*$ .

2)  $a_k$  是绝对不必要属性, 显然  $\forall (a_k, v_{kj}) \in B, ((a_k, v_{kj})^{**} - \{(a_k, v_{kj})\})^* = (a_k, v_{kj})^*$  成立. 又对于任意的约简  $B$ , 有  $a_k \notin B$ , 从而  $((a_k, v_{kj})^{**} \cap B)^* = (a_k, v_{kj})^*$ .  $\forall (b_i, v_{ij}) \in (a_k, v_{kj})^{**} \cap B$ , 则由  $(b_i, v_{ij}) \in (a_k, v_{kj})^{**}$ , 知  $(b_i, v_{ij})^* \supseteq (a_k, v_{kj})^*$ , 又  $(b_i, v_{ij}) \in B, b_i$  不是绝对不必要属性, 所以  $\exists (b_s, v_{st})^* \in (a_k, v_{kj})^*$ , 即  $\exists (b_s, v_{st})^* \supseteq (a_k, v_{kj})^*$ , 从而知  $\exists M_{(a_k, v_{kj})} \supseteq (a_k, v_{kj})^{**} \cap B$ , 即  $\exists M_{(a_k, v_{kj})}^* \subseteq ((a_k, v_{kj})^{**} \cap B)^* = (a_k, v_{kj})^*$ , 又  $M_{(a_k, v_{kj})}^* \supseteq (a_k, v_{kj})^*$ , 知  $\exists M_{(a_k, v_{kj})}^*$ , 使  $M_{(a_k, v_{kj})}^* = (a_k, v_{kj})^*$ .

假设  $a_k$  不是绝对不必要属性, 则存在约简  $B$ , 使  $a_k \in B$ , 因此,  $\forall (a_k, v_{kj}) \in B, ((a_k, v_{kj})^{**} \cap (B - (a_k, v_{kj})))^* = (a_k, v_{kj})^*$ , 有  $((a_k, v_{kj})^{**} \cap (B - (a_k, v_{kj})))^* \supseteq (a_k, v_{kj})^* \cap (B - (a_k, v_{kj}))^* \supseteq (a_k, v_{kj})^*$ , 所以,  $((a_k, v_{kj})^{**} \cap (B - (a_k, v_{kj})))^* \supseteq (a_k, v_{kj})^*$ . 由于  $(a_k, v_{kj}) \notin M_{(a_k, v_{kj})}$ , 因此,  $M_{(a_k, v_{kj})} = (M_{(a_k, v_{kj})} \cap (B - (a_k, v_{kj}))) \cup (M_{(a_k, v_{kj})} \cap (B - B))$ , 即有  $M_{(a_k, v_{kj})}^* = (M_{(a_k, v_{kj})} \cap (B - (a_k, v_{kj})))^* \cup ((M_{(a_k, v_{kj})} \cap (B - B))^*)$ ,  $M_{(a_k, v_{kj})}^* \subseteq (a_k, v_{kj})^{**} \cap (B - (a_k, v_{kj}))$ , 有  $(M_{(a_k, v_{kj})} \cap (B - (a_k, v_{kj})))^* \supseteq ((a_k, v_{kj})^{**} \cap (B - (a_k, v_{kj})))^*$ ;  $\forall (m_i, v_{ij}) \in M_{(a_k, v_{kj})} \cap (B - B)$ , 一方面,  $(m_i, v_{ij}) \in M_{(a_k, v_{kj})}$ , 则  $(m_i, v_{ij})^* \supseteq (a_k, v_{kj})^*$ , 有  $(m_i, v_{ij})^{**} \subseteq (a_k, v_{kj})^{**}, (a_k, v_{kj}) \notin (m_i, v_{ij})^{**}$ . 由另一方面  $(m_i, v_{ij}) \in (B - B)$ , 得  $(m_i, v_{ij})^* = ((m_i, v_{ij})^{**} \cap B)^* = ((m_i, v_{ij})^{**} \cap (B - (a_k, v_{kj})))^* \supseteq ((a_k, v_{kj})^{**} \cap (B - (a_k, v_{kj})))^*$ , 从而,  $(M_{(a_k, v_{kj})} \cap (B - B))^* = ((m_i, v_{ij})^{**} \cap (B - (a_k, v_{kj})))^* \supseteq ((a_k, v_{kj})^{**} \cap (B - (a_k, v_{kj})))^*$ , 所以,  $M_{(a_k, v_{kj})}^* \supseteq ((a_k, v_{kj})^{**} \cap (B - (a_k, v_{kj})))^* \supseteq (a_k, v_{kj})^*, M_{(a_k, v_{kj})}^* \supseteq (a_k, v_{kj})^*$ , 与已知矛盾, 所以  $\forall (a_k, v_{kj}) \in B, ((a_k, v_{kj})^{**} - \{(a_k, v_{kj})\})^* = (a_k, v_{kj})^*$  且  $\exists M_{(a_k, v_{kj})}^*$  使  $M_{(a_k, v_{kj})}^* = (a_k, v_{kj})^*$ ,  $a_k$  是绝对不必要属性.

3) 由 (1) 和 (2) 即得.

例 1 给出信息形式背景如表 1.

表 1 所示信息形式背景有 9 个信息概念, 分别记为  $IC_i (i = 1, 2, \dots, 9)$ , 其中  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, A = \{a, b, c, d, e\},$   $= \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2), (d, 1), (d, 2), (e, 1), (e, 2)\}.$

$$IC_1 = (\emptyset, \emptyset), IC_2 = (\{1\}, \{(a, 1), (b, 2), (d, 1), (e, 1)\}),$$

$$IC_3 = (\{3, 5\}, \{(a, 1), (b, 2), (c, 1)\}), IC_4 = (\{2\}, \{(a, 2), (b, 1), (c, 2)\}).$$

$$IC_5 = (\{6\}, \{(a, 2), (b, 1), (d, 2), (e, 2)\}), IC_6 = (\{1, 4\}, \{(d, 1)\}).$$

$$IC_7 = (\{1, 3, 5\}, \{(a, 1), (b, 2)\}), IC_8 = (\{2, 6\}, \{(a, 2), (b, 1)\}), IC_9 = (U, \emptyset).$$

由定理 3.1, 对属性  $a$  来讲,  $((a, 1)^{**} - \{(a, 1)\})^* = \{1, 3, 5\} = (a, 1)^*, ((a, 2)^{**} - \{(a, 2)\})^* = \{2, 6\} = (a, 2)^*, M_{(a,1)} = \emptyset, \text{所以 } M_{(a,1)}^* = U \text{ (} (a, 1)^* \text{); } M_{(a,2)} = \emptyset, \text{所以 } M_{(a,2)}^* = U \text{ (} (a, 2)^* \text{), 可得 } a \text{ 是相对必要属性.}$

对属性  $b$  来讲,  $((b, 1)^{**} - \{(b, 1)\})^* = \{2, 6\} = (b, 1)^*, ((b, 2)^{**} - \{(b, 2)\})^* = \{1, 3, 5\} = (b, 2)^*, M_{(b,1)} = \emptyset, \text{所以 } M_{(b,1)}^* = U \text{ (} (b, 1)^* \text{); } M_{(b,2)} = \emptyset, \text{所以 } M_{(b,2)}^* = U \text{ (} (b, 2)^* \text{), 可得 } b \text{ 是相对必要属性.}$

对属性  $c$  来讲,  $((c, 1)^{**} - \{(c, 1)\})^* = \{1, 3, 5\} = (c, 1)^*, \text{所以 } c \text{ 是核心属性.}$

对属性  $d$  来讲,  $((d, 1)^{**} - \{(d, 1)\})^* = U = (d, 1)^*, \text{所以 } d \text{ 是核心属性.}$

对属性  $e$  来讲,  $((e, 1)^{**} - \{(e, 1)\})^* = \{1\} = (e, 1)^*, ((e, 2)^{**} - \{(e, 2)\})^* = \{6\} = (e, 2)^*, M_{(e,1)} = \{(a, 1), (b, 2), (d, 1)\}, M_{(e,1)}^* = \{1\} = (e, 1)^*, \text{所以 } e \text{ 是不必要属性.}$

这与文献 [3] 中结果完全一致.

#### 4 结束语

论文首先研究了信息概念格的协调集的判定, 根据信息形式背景下属性作用的不同, 把属性分成了 3 类, 并讨论了 3 类属性的判定定理, 扩充了经典概念格理论. 下一步我们将结合属性的特征研究信息概念格的约简.

#### 参考文献:

- [1] WILLE R. Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concepts [C]//MAN R. Ordered Sets. Boston: Reidel, 1982: 445 - 470.
- [2] 张文修, 魏玲, 祁建军. 概念格的属性约简理论与方法 [J]. 中国科学, 2005, 35(6), 628 - 639.
- [3] 张文修. 粗糙集与概念格 [M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2006: 423 - 432.

表 1 信息形式背景

Table 1 An information formal context					
$U$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$
1	1	2	0	1	1
2	2	1	2	0	0
3	1	2	1	0	0
4	0	0	0	1	0
5	1	2	1	0	0
6	2	1	0	2	2