

doi: 10.3969/j.issn.1007-855x.2011.02.015

# 关于 Smarandache 双阶乘函数 $sdf(n)$ 的两个问题

樊旭辉, 朱 熙, 闫欣荣

( 武警工程学院 基础部 陕西 西安 710086)

摘要: 对于任意的正整数  $n$ , Smarandache 双阶乘函数  $sdf(n)$  定义为最小的正整数  $m$  使得  $n | m!!$  其中  $m!! = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots m, & 2 \nmid n \\ 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots m, & 2 | n \end{cases}$ . 即就是  $sdf(n) = \min\{m: n | m!!, m \in N\}$ . 主要目的是通过研究  $\ln sdf(n)$  的值的分布性质, 从而将 Felice Russo 在文献 [1] 中提出的两个极限问题彻底解决.

关键词: Smarandache 双阶乘函数  $sdf(n)$ ; 极限; 渐近公式

中图分类号: O156.4 文献标识码: A 文章编号: 1007-855X(2011)02-0071-04

## On Two Questions of Smarandache Double Factorial Function

FAN Xu-hui, ZHU Xi, YAN Xin-rong

( Foundation Department, Engineering College of Armed Police Force, Xi'an 710086, China)

**Abstract:** For any positive integer  $n$ , the Smarandache double factorial  $sdf(n)$  is defined as the smallest integer  $m$  such that  $n | m!!$ , where  $m!! = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots m, & 2 \nmid n \\ 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots m, & 2 | n \end{cases}$ . That is  $sdf(n) = \min\{m: n | m!!, m \in N\}$ . The main purpose of this paper is to study the arithmetical properties of  $\ln sdf(n)$  by the elementary methods, and to solve two problems which were proposed by Felice Russo in reference [1].

**Key words:** Smarandache double factorial function; limit; asymptotic formula

### 0 引言

对于任意正整数  $n$ , Smarandache 双阶乘函数  $sdf(n)$  定义为最小的正整数  $m$  使得  $n | m!!$  其中  $m!! = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots m, & 2 \nmid n \\ 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots m, & 2 | n \end{cases}$ , 即就是  $sdf(n) = \min\{m: n | m!!, m \in N\}$ . 例如:  $sdf(1) = 1, sdf(2) = 2, sdf(3) = 3, sdf(4) = 4, sdf(5) = 5, sdf(6) = 6, sdf(7) = 7, sdf(8) = 4, \dots$

关于  $sdf(n)$  的性质, 有不少学者进行了研究, 得到了许多有重要理论价值的研究成果<sup>[1-3]</sup>. Felice Russo 在文献 [1] 中对函数进行了系统研究, 得到了一些关于  $sdf(n)$  的基本性质. 同时, Felice Russo 在文献 [1] 中提出如下问题:

问题 1: 计算极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=2}^n \frac{\ln sdf(k)}{\ln k}}{n}$ ;

问题 2: 计算极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{sdf(n)}{\theta(n)}$  其中  $\theta(n) = \sum_{k \leq n} \ln sdf(k)$ .

本文的主要目的是通过研究  $\ln sdf(n)$  的值的分布性质, 从而将 Felice Russo 在文献 [1] 中提出的两个极限问题彻底解决, 具体说就是证明下面的结论:

收稿日期: 2010-05-04. 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(项目编号: 10671155).

作者简介: 樊旭辉(1975-) 男, 硕士, 讲师. 主要研究方向: 数论及其应用研究. E-mail: xuhuifan2050@163.com

定理 1 对于任意实数  $x \geq 2$ , 有渐近公式:  $\sum_{n \leq x} \ln sdf(n) = x \ln x + O(x)$ .

定理 2 对于任意的正整数  $n > 1$ , 有估计式:  $\frac{\sum_{k=2}^n \frac{\ln sdf(k)}{\ln k}}{n} = 1 + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)$

推论 1 对于任意的正整数  $n > 1$ , 有极限:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=2}^n \frac{\ln sdf(k)}{\ln k}}{n} = 1$ .

定理 3 对于任意的正整数  $n > 1$ , 有估计式:  $\frac{sdf(n)}{\theta(n)} = O\left(\frac{1}{\ln n}\right) = 1$ .

推论 2 对于任意的正整数  $n > 1$ , 有极限:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{sdf(n)}{\theta(n)} = 0$ .

## 1 引理及其证明

为了完成定理的证明, 我们需要如下的引理:

引理 1<sup>[4]</sup> 对于任意的正整数  $n > 1$ , 令  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$  表示  $n$  的标准分解式, 如果  $\alpha_i \geq 2$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), 那么称  $n$  为 square - full 数. 令  $A_2(x)$  表示不超过  $x$  的 square - full 数的集合, 有渐近公式:

$$A_2(x) = \frac{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}{\zeta(3)} x^{1/2} + \frac{\zeta\left(\frac{2}{3}\right)}{\zeta(2)} x^{1/3} + O(x^{1/6} \exp(-C \ln^{3/5} x (\zeta(s) \ln \ln x)^{-1/5})) \quad (1)$$

其中  $C > 0$  为常数  $\zeta(s)$  为 Riemann - zeta 函数.

引理 2 设  $p$  是任意素数  $k$  是任意正整数, 则对任意实数  $x \geq 2$ , 有渐近公式:

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ \binom{pn}{p} = 1}} \ln p = x \ln x + O(x) \quad (2)$$

证明: 根据素数定理的几个不同的形式, 我们有:

$$\sum_{n \leq x} \frac{\ln p}{p} = \ln x + O(1), \quad \sum_{n \leq x} \ln p = x + O\left(\frac{x}{\ln x}\right), \quad \sum_{n \leq x} \frac{\ln p}{p^2} = D + O\left(\frac{1}{\ln x}\right)$$

其中  $D$  是可计算的正常数.

由上述渐近公式, 有:

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ \binom{pn}{p} = 1}} \ln p = \sum_{p \leq x} \ln p \sum_{\substack{n \leq \frac{x}{p} \\ \binom{pn}{p} = 1}} 1 = \sum_{p \leq x} \ln p \left( \frac{x}{p} - \frac{x}{p^2} + O(1) \right) = x \sum_{p \leq x} \frac{\ln p}{p} - x \sum_{p \leq x} \frac{\ln p}{p^2} + O\left(\sum_{p \leq x} \ln p\right) = x \ln x + O(x)$$

于是证明了引理 2.

## 2 定理的证明

首先估计  $\sum_{n \leq x} sdf(n)$  的上界. 事实上, 由  $sdf(n)$  的定义及 Euler 求和公式, 有:

$$\sum_{n \leq x} \ln sdf(n) \leq \sum_{n \leq x} \ln n = x \ln x - x + O(\ln x) = x \ln x + O(x) \quad (3)$$

接下来估计  $\sum_{n \leq x} sdf(n)$  的下界.

把  $[1, x]$  中的所有正整数  $n$  分为  $A$  和  $B$  两个集合, 其中  $A$  表示  $[1, x]$  中的所有 square - full 数所构成的集合;  $B$  表示  $[1, x]$  中所有不属于  $A$  的正整数所构成的集合. 于是有:

$$\sum_{n \leq x} \ln sdf(n) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in A}} \ln sdf(n) + \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in B}} \ln sdf(n) \quad (4)$$

由集合  $A$  的定义及引理 1, 有:

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \in A}} \ln sdf(n) \leq \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in A}} \ln n \leq \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in A}} \ln x = \ln x \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in A}} 1 = \ln x \cdot A_2(x) < < \sqrt{x} \ln x \quad (5)$$

对任意的  $n \in B$ , 一定存在一个素数  $p$  满足  $p \mid n$  且  $p^2 \nmid n$ . 因此, 由  $sdf(n)$  的定义, 有  $sdf(np) \geq p$ . 由此可得:

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \in B}} \ln sdf(n) = \sum_{\substack{np \leq x \\ (n,p)=1}} \ln sdf(np) \geq \sum_{\substack{np \leq x \\ (n,p)=1}} \ln p \quad (6)$$

由引理 2 及(6)式, 有:

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \in B}} \ln sdf(n) \geq x \ln x + O(x) \quad (7)$$

由(4)、(5)和(7)式, 有:

$$\sum_{n \leq x} \ln sdf(n) \geq x \ln x + O(x) \quad (8)$$

由(3)和(8)式, 有:

$$\sum_{n \leq x} \ln sdf(n) = x \ln x + O(x)$$

于是证明了定理 1.

一方面, 由定理 1, 有:

$$\frac{\sum_{k=2}^n \frac{\ln sdf(k)}{\ln k}}{n} \geq \frac{\sum_{k=2}^n \frac{\ln sdf(k)}{\ln n}}{n} = \frac{\sum_{k=2}^n \ln sdf(k)}{n \ln n} = \frac{n \ln n + O(n)}{n \ln n} = 1 + O\left(\frac{1}{\ln n}\right) \quad (9)$$

另一方面, 由  $sdf(n)$  的定义, 有:

$$\frac{\sum_{k=2}^n \frac{\ln sdf(k)}{\ln k}}{n} \leq \frac{\sum_{k=2}^n \frac{\ln k}{\ln k}}{n} = \frac{n-1}{n} < 1 \quad (10)$$

结合(9)和(10)式, 有:

$$\frac{\sum_{k=2}^n \frac{\ln sdf(k)}{\ln k}}{n} = 1 + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)$$

于是证明了定理 2.

推论 1 可理解为定理 2 中取  $n \rightarrow \infty$  时的极限.

由  $sdf(n)$  的定义及定理 1, 有:

$$0 < \frac{sdf(n)}{\theta(n)} \leq \frac{n}{\theta(n)} = \frac{n}{n \ln n + O(n)} = O\left(\frac{1}{\ln n}\right) \quad (11)$$

由(11)式, 有:

$$\frac{sdf(n)}{\theta(n)} = O\left(\frac{1}{\ln n}\right)$$

于是证明了定理 3.

推论 2 可理解为定理 3 中取  $n \rightarrow \infty$  时的极限.

### 3 结 语

本文通过利用初等及解析的方法研究  $\ln sdf(n)$  的值的分布性质, 从而将 Felice Russo 在文献 [1] 中提出的两个极限问题彻底解决. 关于 Smarandache 双阶乘函数  $sdf(n)$  的性质目前知之甚少, 还有许多问题有待有兴趣的学者进行研究. 例如:

问题 1: 求方程  $S^k(n) + Z^k(n) = sdf^k(n)$  的所有正整数解, 其中  $S(n)$  是 Smarandache 函数(定义参阅文献 [5]),  $Z(n)$  是伪 Smarandache 函数(定义参阅文献 [6]),  $k$  是任意整数.

问题 2: 研究函数  $sdf[Z(n)]$  及函数  $Z[sdf(n)]$  的性质.

#### 参考文献:

- [1] Felice Russo. A set of new Smarandache function, sequences and conjectures in number theory [M]. USA: American research press 2000.
- [2] Le Maohua. On the Smarandache double factorial function [J]. Smarandache Notions Journal 2004: 209 – 228.
- [3] Tom M Apostol. Introduction to Analytic Number Theory [M]. New York: Spinger – Verlag, 1976.
- [4] Hardy G H, Wright E M. An Introduction to Analytic Number Theory [M]. Oxford: Oxford University Press, 1981.
- [5] Ashbacher C. An introduction to the Smarandache function [M]. Vail: Erhus University Press, 1995.
- [6] Kenichirokk. Comment and topics on Smarandache notions and problems [M]. Vail: Erhus University Press, 1996.
- [7] 潘承洞, 潘承彪. 素数定理的初等证明 [M]. 上海: 上海科技出版社, 1988.
- [8] Smarandache F. Only Problems, Not Solutions [M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.
- [9] 张文鹏, 等. 初等数论 [M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2007.

(上接第 40 页)

### 3.2 仿真试验分析

汽车蛇行试验仿真结果如图 3 和图 4 所示. 图 3 为汽车的侧向位移的变化曲线(黑点为标桩位置), 实线是汽车车速为 36 km/h 的位移变化, 虚线是汽车车速为 70 km/h 的位移变化. 由图中位移变化可知, 当车速为 70 km/h 时, 汽车在绕过最后一个标桩时失稳, 造成不能及时回正; 当车速低于 70 km/h 时, 汽车处于稳定状态, 汽车的行驶轨迹与设计的试验轨迹基本吻合, 具有良好的追随性能.

图 4 是仿真过程中汽车处于稳定状态时的前轮转角、横摆角速度、侧向加速度随径向位移的变化趋势. 由图中变化趋势可知, 横摆角速度的最大值为  $12^\circ/\text{s}$ , 前轮转角的最大值为  $76^\circ$ .

## 4 结论

根据本文设计的蛇行路线和仿真数据曲线可知, ADAMS/Car 对汽车动力学性能能够精确仿真, 因此可以在 ADAMS/Car 中建立汽车模型, 并通过 ADAMS/Car 进行动力学仿真分析, 对其设计参数不断修改来改善其整车性能, 达到优化产品设计方案, 降低成本和缩短设计周期的目的.

本文采用 ADAMS 中的闭环控制, 今后将会利用 ADAMS 建立更复杂全面的模型进行研究, 以拓广该项研究的价值.

#### 参考文献:

- [1] 刘文婷, 王波. 基于虚拟样机技术的蛇行试验仿真分析 [J]. 拖拉机与农用运输车, 2010(2): 35 – 37.
- [2] 尹浩, 赵又群, 吴杰. 基于汽车操纵逆问题的蛇行试验分析研究 [J]. 机械科学与技术, 2007(12): 1640 – 1643.
- [3] 翁秀奇, 陈加国. 汽车蛇行试验及数据处理 [J]. 现代制造工程, 2006(5): 115 – 117.
- [4] 王国强, 张进平, 马若丁. 虚拟样机技术及其在 ADAMS 上的实践 [M]. 西北工业大学出版社, 2002.
- [5] 喻凡. 车辆动力学及其控制 [M]. 北京: 人民交通出版社, 2004.
- [6] 王树凤, 张俊友, 余群. 应用 ADAMS 设计车辆操纵稳定性试验 [J]. 中国农业大学学报, 2001, 6(6): 81 – 84.