具有结构不确定性系统的鲁棒 H_∞ 控制器设计①

周冬明[1], 刘涵哲[2], 解季萍[3]

(1.云南大学信息学院, 云南昆明 650091; 2.云南民族学院物理系, 云南昆明 650031; 3.云南广播电视大学, 云南昆明 650031)

摘要 研究了具有结构不确定性系统的鲁棒 H_∞ 状态反馈控制, 给出了该类系统一种鲁棒 H_∞ 控制器的设计方法. 把任意能量有界的干扰信号、结构不确定性系统的控制问题转化成了鲁棒 H_∞ 控制问题, 控制器可以通过解修正的代数黎卡提方程得到. 设计例子证明了所给方法的有效性.

关键词: 结构不确定性系统; 鲁棒 H_∞ 控制; 代数 Riccati 方程

中图分类号: TM571　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1007－855X(2001)06－005－03

0 前 言

在实际系统中不确定性是不可避免的, 且由于建模的误差以及系统工作环境的变化都会带来不确定因素. H_∞ 优化控制正是为解决这些不确定性系统而提出的一种设计方法. 自从加拿大学者 Zames[1] 在 1981 年提出了著名的 H_∞ 优化设计思想以来, 鲁棒控制就成为控制理论界一个新的研究热点. 这期间出现了许多处理 H_∞ 控制问题的优秀方法, 例如基于 Youla 参数化及 Nevanlinna－Pick 插值理论的模型匹配方法[2]; 基于时域模型的 2－Riccati 方程方法[3], 这一方法将鲁棒镇定问题、灵敏度极小化问题、跟踪问题、模型匹配问题等都统一于标准 H_∞ 控制问题, 使 H_∞ 控制问题的研究更加条理化; 以及后来发展起来的基于有界实引理的线性矩阵不等式方法[4~8]. 这些方法都可以很好地处理模型不确定性问题. 本文的目的是在这些方法的基础上来设计一种新的鲁棒 H_∞ 控制器, 且该控制器可以通过求解一个修正的 Riccati 方程得到.

1 问题描述

考虑如下具有结构不确定性系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + \triangle A)x(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x(t) \in R^n$ 为状态向量, $w(t) \in R^{m_1}$ 为干扰输入向量, $u(t) \in R^{m_2}$ 为控制输入量, $z(t) \in R^{p_1}$ 为误差向量, A, B_1, B_2, C, D 为已知矩阵, $\triangle A$ 为结构不确定性, 它可以表示为

$$\triangle A = G\sum(t)H \tag{2}$$

式中 $G \in R^{n\times r_i}$ 和 $H \in R^{r_i\times n}$ 为已知矩阵, $\sum(t) \in R^{r_i\times r_i}$ 为不确定性的未知矩阵, 但

$$\sum{}^T(t)\sum(t) \le \varepsilon^2 I \tag{3}$$

对于结构不确定性系统(1), 如何设计一个状态反馈控制

$$u(t) = F_\infty x(t) \tag{4}$$

使得如下的闭环系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_c x(t) + B_1 w(t) \\ z(t) = C_c x(t) \end{cases} \tag{5}$$

---

① 收稿日期: 2001－02～22;
第一作者简介: 周冬明, 男, 1963 年生, 硕士. 研究方向: 鲁棒控制和神经网络;

渐近稳定. 且 $\| G_{zw}(s) \|_\infty = \| C_c(sI - A_c)^{-1} B_1 \|_\infty < \gamma$, 闭环矩阵 A_c 稳定. 式中 $A_c = A + \triangle A + B_2 F_\infty$, $Cc = C + DF_\infty$.

2 鲁棒 H_∞ 控制器设计

引理 1 对于任意适当维数的矩阵 X, Y 及实数 ε 有

$$X^T Y + Y^T X \le \varepsilon^2 X^T X + \varepsilon^{-2} Y^T Y \tag{6}$$

证 明 把矩阵 X, Y 分别写成 n 维向量形式, 即

$$X = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n),\ Y = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n),$$

对任一 n 维向量 $\alpha_i = (\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \cdots, \alpha_{ni})^T$, $\beta_i = (\beta_{1j}, \beta_{2j}, \cdots, \beta_{nj})^T$, $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 有

$$\sum_{k=1}^{n} 2\alpha_{ki}\beta_{kj} \le \sum_{k=1}^{n} (\varepsilon^2 \alpha_{ki}^2 + \varepsilon^{-2} \beta_{kj}^2)$$

即

$$\alpha_i^T \beta_j + \beta_j^T \alpha_i \le \varepsilon^2 \alpha_i^T \alpha_i + \varepsilon^{-2} \beta_j^T \beta_j$$

所以有 $X^T Y + Y^T X \le \varepsilon^2 X^T X + \varepsilon^{-2} Y^T Y$, 引理 1 证毕.

引理 2 如果存在一个正定对称矩阵 P 和 Q 满足如下不等式

$$A_c^T P + PA_c + \frac{1}{\gamma^2} PB_1 B_1^T P + C_c^T C_c + Q < 0 \tag{7}$$

则对具有状态反馈控制(4)的闭环系统(5)是稳定的, $\| G_{zw}(s) \|_\infty < \gamma$ 闭环矩阵 A_c 稳定.

定 理 对于系统(1)和 $\| G_{zw}(s) \|_\infty < \gamma$ 如果存在正实数 $\varepsilon > 0$, $q > 0$, 和正定对称矩阵 R 和 Q 使得如下代数 Riccati 方程

$$A^T P + PA - PB_2 R^{-1} B_2^T P + \frac{1}{\gamma^2} PB_1 B_1^T P + C_c^T C^c + Q + PGG^T P + \varepsilon^2 H^T H + qI = 0 \tag{8}$$

有唯一的正定对称矩阵 $P > 0$, 则闭环系统(5)是渐近稳定的, 且 w 到 z 的闭环传递函数满足 $\| G_{zw}(s) \|_\infty = \| C_c(sI - A_c)^{-1} B_1 \|_\infty < \gamma$, 闭环矩阵 A_c 稳定.

相对应于(4)的控制器为 $u(t) = F_\infty x(t) = -\frac{1}{2} R^{-1} B_2^T P x(t)$

证 明 假若我们能证明不等式(7)拥有, 这就完成了证明.

$$A_c = A + \triangle A + B_2 F_\infty = A + \triangle A - \frac{1}{2} B_2 R^{-1} B_2^T P \tag{9}$$

把(9)式代入(7)式, 让(7)式的左边等于 L, 我们得

$$\begin{aligned} L &= (A + \triangle A - \frac{1}{2} B_2 R^{-1} B_2^T P)^T P + P(A + \triangle A - \frac{1}{2} B_2 R^{-1} B_2^T P) + \frac{1}{\gamma^2} PB_1 B_1^T P + C_c^T C_c + Q \\ &= A^T P + \triangle A^T A - \frac{1}{2} (B_2 R^{-1} B_2^T P)^T P + PA + P\triangle A - \frac{1}{2} PB_2 R^{-1} B_2^T P) + \frac{1}{\gamma^2} PB_1 B_1^T P + C_c^T C_c + Q \\ &= A^T P + PA + \triangle A^T A + P\triangle A - PB_2 R^{-1} B_2^T P + \frac{1}{\gamma^2} PB_1 B_1^T P + C_c^T C_c + Q \end{aligned} \tag{10}$$

考虑(8)式, 我们有

$$A^T P + PA - PB_2 R^{-1} B_2^T P + \frac{1}{\gamma^2} PB_1 B_1^T P + C_c^T C^c + Q = - PGG^T P - \varepsilon^2 H^T H - qI \tag{11}$$

把(11)式代入(10)得

$$L = \triangle A^T P + P\triangle A - PGG^T P - \varepsilon^2 H^T H - qI \tag{12}$$

根据引理 1 有

$$\triangle A^T P + P\triangle A = H^T \sum\nolimits^T (t) G^T P + PG \sum (t) H \le PGG^T P + \varepsilon^2 H^T H \tag{13}$$

把(13)式代入(12)式得

$$L \le PGG^T P + \varepsilon^2 H^T H - PGG^T P - \varepsilon^2 H^T H - qI \le - qI < 0$$

从而得出(7)式成立．证毕．

定理给出了一种方法来设计结构不确定性系统的鲁棒 H_∞ 控制器．

3 设计举例

考虑如下结构不确定性系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + G\sum(t)H)x(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

式中 $A = \begin{bmatrix} -7.548 & 1.265 \\ 1.265 & -3.21 \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.025 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.8 \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.8 \end{bmatrix}$, $H = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.3 \\ 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$, $C = [0.5 \quad 0.8]$, $D = [1 \quad 0]$, $\sum(t) = \begin{bmatrix} \sin t & 0 \\ 0 & \cos t \end{bmatrix}$. 令 $\varepsilon = 1$, $q = 0.01$, $R = I$, $Q = 0.01I$, $\gamma = 0.01$.通过求解(8)式就得到唯一的正定对称矩阵

$$P = \begin{bmatrix} 0.03440288 & 0.03827902 \\ 0.03827902 & 0.13346510 \end{bmatrix}$$

鲁棒 H_∞ 控制器为　$u(t) = -\frac{1}{2}R^{-1}B_2^T Px(t) = \begin{bmatrix} -0.02676899 & -0.05250579 \\ -0.02391233 & -0.06295580 \end{bmatrix} x(t)$

4 结　论

本文给出了具有结构不确定性系统的鲁棒 H_∞ 控制器设计的一种方法，它只需要求解一个修正的 Riccati 方程．由于 H_∞ 优化反馈控制实现非常简便而且经济，因此对于工业生产中的广泛应用具有重大的实际意义．一个设计例子也证明了所给方法的有效性．

参考文献：

[1] Zames G.. Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms and approximate inverses[J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 1981, AC-26(2): 301～320.

[2] Doyle J. C., Francis B. and Tannenbaum A. R.. Feedback Control Theory[M]. New York: Mcmillan Publishing Company, 1991.

[3] Zhou Kemin, Doyle J. C. and Glover Keith. Robust and Optimal Control[M]. New Jersey: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1996.

[4] 杨富文.具有结构不确定性系统的鲁棒 H_∞ 控制[J].控制理论与应用, 1998, 15(1): 61～68.

[5] 毛维杰, 孙优贤. 不确定线性系统输出反馈鲁棒镇定的充要条件[J].控制与决策, 1998, 13(1): 59～62.

[6] 杨富文.具有参数不确定性和外干扰系统的鲁棒 H_∞ 状态反馈控制[J]. 控制理论与应用, 1993, 10(6): 698～702.

[7] Trentelman H. L. and Willems Jan C.. control in a behavioral context: the full information case[J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 1999, 44(3): 521～536.

[8] 杨建军, 吴方向, 史忠科. Robust fault-tolerant controller design for linear delay systems with uncertainty[J].控制理论与应用, 2000, 17(3): 442～444.

Robust Controller Design for Systems with Structured Uncertainty

ZHOU Dong-ming, LU Han-zhe, XIE Ji-ping

(1. Information College, Yunnan University, Kunming 650091, China;

2. Department of Physics, Yunnan University of the Nationalities, Kunming 650031, China;

3. Yunnan University of the Broadcasting and Television, Kunming 650031, China)

Abstract Investigating robust state feedback control problem for the systems with structured uncertainty, this paper gives a method to design robust controller for the systems with structured uncertainty. Any arbitrary energy-bounded signal problem and the control problem of the systems with structured uncertainty are transformed into the problem of control. The controller can be obtained by solving a modified Riccati equation. A design example shows the effectiveness of the approach.

Key words: systems with structured uncertainty; robust control; algebraic Riccati equation