第29卷第5期 昆明理工大学学报(理工版) Vol.29 No.5
2004年10月 Journal of Kunming University of Science and Technology (Science and Technology) Oct. 2004

准素理想的商运算及其代数簇的性质

陈小松，陈入云
(中南大学 数学科学与计算技术学院,湖南 长沙 410083)

摘要：对准素理想的商运算进行了讨论和研究,得到了准素理想的商运算的若干性质;并考察了准素理想的和、交、并、商对另一理想求商运算以及准素理想对理想的和、交求商运算;在此基础上,还探讨了它们的代数簇的性质.

关键词：准素理想；理想的和、交、并、商；代数簇
中图分类号：O15 **文献标识码**：A **文章编号**：1007-855X(2004)05-0149-03

Quotients of Primary Ideals and Properties of Its Algebraic Varieties

CHEN Xiao-song, CHEN Ru-yun
(College of Mathematical Science and Computational Technology, Central South University, Changsha 410083, China)

Abstract: The quotient operation of primary ideals are discussed and some properties of quotients are obtained. The proterties of sum, intersection, combination and quotient of primary ideals under the quotient operation are achieved. The relations of their algebraic variety are studied.

Key words: primary ideal; sum, intersection, combination and quotient of ideal; algebraic variety

0 引 言

在代数学的研究中,我们经常讨论理想的代数运算.在研究环的理想理论和结构理论时,理想商的概念及结论起着重要的作用.而准素理想作为理想的一种特殊理想,在数学许多领域都有着十分广泛的应用,因此,更具有重要的研究意义.在文献[1][2][3]中,已经得到了理想的和、理想的积、理想的交以及理想的商的结论,但作为一种特殊理想,准素理想是不是也有类似的结果,本文就是基于这一思想而进行讨论的.为了讨论的方便,我们先看下面的定义及几个引理.

1 预备知识

定义1 环 R 的一个非空子集 $I \subseteq R$ 叫做 R 中的一个理想,如果

(1) $a, b \in I \Rightarrow a - b \in I$;

(2) $a \in I, r \in R \Rightarrow ra, ar \in I$.

定义2 对于理想 I,如果 $ab \in I$,并且 $a \notin I$ 且,则存在 $l \in N$ 使得 $a^l \in I$,我们把这种理想称之为准素理想.

定义3 如果 Q 是环 $k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 的准素理想,则 $P = \sqrt{Q}$ 称为 Q 的相伴素理想,Q 称为 P - 准素理想.

定义4 设 I 和 J 是环 R 中任意给定的两个理想.则

(1) 理想 I 和 J 的和,用 $I + J$ 表示,是指集合

$$I + J = \{a + b \mid a \in I, b \in J\}.$$

收稿日期：2004-02-23. **基金项目**：湖南省自然科学科学基金(项目编号：02JJY3002).
第一作者简介：陈小松(1956~),男,教授.主要研究方向：代数与数论.

(2) 理想 I 和 J 的交,用 I 表示,是指集合

$$I \cap J = \{a \mid a \in I 且 a \in J\}.$$

(3) 理想 I 和 J 的并,用 $I \cup J$ 表示,是指集合

$$I \cup J = \{a \mid a \in I 或 a \in J\}$$

(4) 理想 I 和 J 的商,用 $I : J$ 表示,是指集合

$$I : J = \{a \in R \mid aJ \in I\}.$$

定义5 设 k 是域,$f_1, f_2, \cdots, f_s$ 是环 $k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 中的一组多项式.定义 $V(f_1, f_2, \cdots, f_s = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in k^n \mid \forall 1 \le i \le s, f_i(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0\}$.称 $V(f_1, f_2, \cdots, f_s)$ 是由 $f_1, f_2, \cdots, f_s$ 定义的代数簇.

引理1[1:198] 假设 P 是 $k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 的素理想,Q_1, Q_2 是 P - 准素理想,则 $Q = Q_1 \cap Q_2$ 也是 P - 准素理想.

引理2[2:15-78] 设 I, J 和 K 是环 R 中的三个理想.则有

1) $I \subseteq (I : J)$;

2) $(I : (J + K)) = (I : J) \cap (I : K)$.

引理3[2:77-78] 设 I 和 J 是环 R 中的理想.则 $V(I) \cup V(J) = V(I \cap J)$.

因此有限个代数簇的并仍是代数簇.

引理4[1:95] 设 k 是任意域.如果 $I_1 \subset I_2$,则 $V(I_1) \supset V(I_2)$.

2 主要结论

定理1 设 $Q_1, Q_2 \subset k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 是 P - 准素理想,$J \subset k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$,则

1) 如果 $Q_1 \cap J \neq \Phi, Q_2 \cap J \neq \Phi$,且 $Q_1 \cap Q_2 \neq \Phi$,则

$$V((Q_1 + Q_2) : J) = \Phi;$$

$$V((Q_1 \cap Q_2) : J) = \Phi;$$

$$V((Q_1 \cup Q_2) : J) = \Phi;$$

2) 如果 $Q_1 \cap J = \Phi, Q_2 \cap J = \Phi$,则 $(Q_1 \cap Q_2) : J$ 是 P - 准素理想.

3) 如果 $J \cap P = \Phi$,则 $V((Q_1 \cap Q_2) : J) = V(Q_1 \cap Q_2)$.

证明 1) 因为 $Q_1 \subseteq Q_1 + Q_2$,所以 $Q_1 : J \subseteq (Q_1 + Q_2) : J$,由引理4,推出 $V((Q_1 + Q_2) : J) \subseteq V(Q_1 : J)$.又因为 $Q_1 \cap J \neq \Phi$,令 $f \in (Q_1 \cap J)$ 且 $f \neq 0$,显然 $f \in Q_1$ 且 $f \in J$,得 $1 \in Q_1 : J$,从而 $Q_1 : J = < 1 >$,将其转化为代数簇,可得 $V(Q_1 : J) = \Phi$,既 $V((Q_1 + Q_2) : J) = \Phi$.

令 $Q = Q_1 \cap Q_2$,因为 Q_1, Q_2 是 P - 准素理想,由引理1,故 Q 也是 P - 准素理想.而 $Q_1 \cap Q_2 \neq \Phi$,所以 $Q \cap J \neq \Phi$,根据1)的证明可知:$V(Q : J) = \Phi$,又 $V((Q_1 \cap Q_2) : J) = V(Q : J)$,因此 $V((Q_1 \cap Q_2) : J) = \Phi$.

因为 $Q_1 \subseteq Q_1 \cup Q_2)$,得 $Q_1 : J \subseteq (Q_1 \cup Q_2) : J$,所以 $V((Q_1 \cup Q_2) : J) \subseteq V(Q_1 : J)$.而由以上证明过程可知:$V(Q_1 : J) = \Phi$,故 $V((Q_1 \cup Q_2) : J = \Phi$.

2) $\forall st \in (Q_1 \cap Q_2) : J$,若 s 或 $t \in (Q_1 \cap Q_2) : J$,可知理想 $(Q_1 \cap Q_2) : J$ 是 P - 准素理想.

假设 $s \notin (Q_1 \cap Q_2) : J$ 且 $t \notin (Q_1 \cap Q_2) : J$,由引理2得 $(Q_1 \cap Q_2) \subseteq (Q_1 \cap Q_2) : J$,故 $s \notin (Q_1 \cap Q_2)$ 且 $t \notin (Q_1 \cap Q_2)$.对于 $\forall f \in J$,因 $Q_1 \cap J = \Phi, Q_2 \cap J = \Phi$,得 $f \notin Q_1, f \notin Q_2$,故 $f \notin (Q_1 \cap Q_2)$,显然 $f^m \notin (Q_1 \cap Q_2) : J$.不然,可得 $f \notin (Q_1 \cap Q_2)$,矛盾!故有 $stf \in (Q_1 \cap Q_2)$,取 $s \notin (Q_1 \cap Q_2)$,推出 $tf \in (Q_1 \cap Q_2)$.而 Q_1, Q_2 都是 P - 准素理想,故 $Q_1 \cap Q_2$ 也是 P - 准素理想[引理1],则必存在 $m \in N$ 使得 $(tf)^m = t^m f^m \in (Q_1 \cap Q_2) : J$.又 $f^m \notin (Q_1 \cap Q_2) : J$,于是 $t^m \in (Q_1 \cap Q_2) : J$.从而 $(Q_1 \cap Q_2) : J$ 是 P - 准素理想.

3) 由引理2得 $(Q_1 \cap Q_2) \subseteq (Q_1 \cap Q_2) : J$.而对 $\forall s \in (Q_1 \cap Q_2) : J, \forall f \in J$,由 $P \cap J = \Phi$ 可

知 $f \notin P = \sqrt{Q_1 \cap Q_2}$,推出 $sf \in (Q_1 \cap Q_2)$,得 $s \in (Q_1 \cap Q_2)$,所以 $(Q_1 \cap Q_2) : J \subseteq Q_1 \cap Q_2$.综合以上两式: $(Q_1 \cap Q_2) : J = Q_1 \cap Q_2$.由引理4,将等式两边取代数簇即可得: $V((Q_1 \cap Q_2) : J) = V(Q_1 \cap Q_2)$.

推论1　$I_i \subset k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 是 P - 准素理想, $J \subset k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$,则

1) 如果 $I_i \cap J \neq \Phi$,则

$$V((\sum I_i) : J = \Phi;$$

$$V((\bigcap I_i) : J) = \Phi;$$

$$V((\bigcup I_i) : J) = \Phi.$$

2) 如果 $I_i \cap J = \Phi$,则 $(\bigcap I_i) : J$ 是 P - 准素理想;

3) 如果 $J \cap P = \Phi$,则 $V((\bigcap I_i) : J) = V(\bigcap I_i) = \bigcup V(I_i)$.

定理2　设 $Q \subset k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 是 P - 准素理想, $J \subset K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$,则

1) 如果 $Q \cap J \neq \Phi$,则 $V(Q : (Q : (Q : J))) = \Phi$;

2) 如果 $\Phi \cap J = \Phi$,则 $V(Q : (Q : (Q : J))) = V(\sqrt{Q : J})$;

3) 如果 $J \cap P = \Phi$,则 $V(Q : (Q : (Q : J))) = V(Q)$.

证明　要证明以上定理,我们先来证明这样一个命题:设 Q, J 是 $k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 中的两个理想,则 $V(Q : (Q : (Q : J))) = V(Q : J)$.

由引理知: $(Q : J)J \subseteq Q$,推出 $J \subseteq Q : (Q : J)$,所以 $Q : (Q : (Q : J)). \subseteq Q : J$.又 $(Q : (Q : J))(Q : J) \subseteq Q$,推出 $Q : J \subseteq Q : (Q : (Q : J))$.综合以上两个结论得: $Q : (Q : (Q : J)) = Q : J$.将其转化为代数簇得 $V(Q : (Q : (Q : J))) = V(Q : J)$.

由定理1证明:当 $Q \cap J \neq \Phi$ 时,因 $V(Q : J) = \Phi$,故 $V(Q : (Q : (Q : J))) = \Phi$.

当 $Q \cap J = \Phi$ 时, $Q : J$ 是 P - 准素理想.设 $T = \sqrt{Q : J}$,因为 $Q : J \subseteq \sqrt{Q : J}$,可得 $V(\sqrt{Q : J}) \subseteq V(Q : J)$, $\forall a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in V(Q : J)$,由根理想的定义 $\forall f^m \in Q : J, m \geqslant 1$,蕴涵着 $f \in \sqrt{Q : J}$.而 $f^m(a) = 0$,则得 $f(a) = 0$,但 $f \in \sqrt{Q : J}$,推出 $a \in V(\sqrt{Q : J}$,从而 $V(Q : J) \subseteq V(\sqrt{Q : J})$.所以 $V(Q : J) = V(\sqrt{Q : J})$.既得 $V(Q : (Q : (Q : J))) = V(\sqrt{Q : J})$.

当 $J \cap P = \Phi$ 时,因 $V(Q : J) = V(Q)$,所以 $V(Q : (Q : (Q : J))) = V = (Q)$.

定理3　设 $Q \subset k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 是 P - 准素理想, J、$K \subset k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$,则

1) 当 $Q \cap J \neq \Phi, Q \cap K \neq \Phi$ 时, $V(Q : (J + K)) = \Phi$;

2) 当 $Q \cap J = \Phi, Q \cap K = \Phi$ 时, $Q : (J \cap K)$ 是 P - 准素理想;

3) 当 $J \cap P = \Phi, K \cap P = \Phi$ 时, $V(Q : (J \cap K)) = V(Q)$.

证明　1) 由引理2: $Q : (J + K) = (Q : J) \cap (Q : K)$,得 $V(Q : (J + K)) = V((Q : J) \cap (Q : K))$.而由引理3: $V((Q : J) \cap (Q : K)) = V(Q : J) \cup V(Q : K)$,得 $V(Q : (J + K)) = V(Q : J) \cup V(Q : K)$.当 $Q \cap J \neq \Phi, Q \cap K \neq \Phi$ 时, $V(Q : J) = \Phi, V(Q : K) = \Phi$,故 $V(Q : (J + K)) = V(Q : J) \cup V(Q : K) = \Phi$.

2) $Q \cap J = \Phi, Q \cap K = \Phi$,得 $Q \cap (J \cap K) = \Phi$.根据前面证明得: $Q : (J \cap K)$ 是 P - 准素理想.

3) 由引理2得 $Q \subseteq Q : (J \cap K)$.对 $\forall s \in Q : (J \cap K)$, $\forall f \in J \cap K$,由 $P \cap J = \Phi, K \cap P = \Phi$,可知 $P \cap (J \cap K) = \Phi$,所以 $f \notin P = \sqrt{Q}$,推出 $sf \in Q$,得 $s \in Q$,所以 $Q : (J + K) \subseteq Q$.综合以上两式: $Q : (J + K) = Q$.将等式两边取代数簇即可得: $V(Q : (J + K)) = V(Q)$.

推论2　设 $Q \subset k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 是 P - 准素理想, $J_i \subset k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$,则

(下转第154页)

在(1)两边同乘以 u,然后关于 x 在 Ω 上积分可得:

$$\int_{\Omega} u u_{tt} \mathrm{d}x = -I(u) \tag{7}$$

将(7)代入(6)得:

$$F_{tt}(t) = 2\int_{\Omega} u_t^2 \mathrm{d}x - 2I(u) \tag{8}$$

(8)式结合能量恒等式(4)得:

$$F_{tt}(t) = (\gamma + 3) \mid u_t \mid_2^2 + 2(\gamma - 1)(a(u) - 2(\gamma + 1)E(0) \tag{9}$$

由引理3,(9)式将导致:

$$F_{tt}(t) \geq (\gamma + 3) \mid u_t \mid_2^2 + 2(\gamma + 1)(d - E(0)) \tag{10}$$

$$> 0(\text{因 } E(0) < d) \tag{11}$$

可见 $F(t)$ 是下凸函数.

将(10)两边在$[0,t]$上积分则 $F_t(t) > 2\int_{\Omega} u_0 u_1 \mathrm{d}x + 2(\gamma + 1)(d - E(0))t$

这意味着存在 t_0 使得对 $t \in [t_0, \infty)$ 有 $F_t(t) > 0$, 那么对所有 $t > t_0$, $F(t)$ 严格单调递增, 对 $\alpha > 0$ 而言 $F(t)^{-\alpha}$ 严格单调递减.

由(10)(11)及H&lder不等式知:

$$F_{tt}(t)F(t) - ((\gamma + 3)/4)F_t(t)^2 \geq (\gamma + 3)((F(t) \mid u_t \mid_2^2 - (\int_{\Omega} u u_t \mathrm{d}x)^2) > 0$$

因$(F^{-\alpha})_t = -\alpha F(t)^{-\alpha-1}F_t(t)$

$(F^{-\alpha})_{tt} = -(\alpha/F(t)^{\alpha+2})(F_{tt}(t)F(t) - (\alpha + 1)F_t(t)^2)$

从而对 $\alpha = (\gamma - 1)/4 > 0$ 有$(F^{-\alpha})_{tt} < 0$,即 $F(t)^{-\alpha}$ 是上凸函数,再结合它的严格单减性,所以存在有限的 $\widetilde{T}$,使得当 $t \to \widetilde{T}^-$ 时,有 $F(t)^{-\alpha} \to 0$,即 $F(t) \to +\infty$.

证毕.

参考文献:

[1] 杜心华.一类非线性波动方程混合问题解的存在唯一性[J].四川师范大学学报(自然科学版),1994,17(4):35~42.

[2] Pazy A.Semigroups of Linear Operators and Applications to PDE[M].New York:Springer~Verleg,1983.

[3] D.H.Sattinger.On Global Solution of Nonlinear Hyperbolic Equations[J].Arch.Rat.Mech.Anal,1968,30:148~172.

[4] L.E.Payne and D.H.Sattinger.Saddle Points and Instability of Nonlinear Hyperbolic Equations[J].IsRael Journal of Mathematics,1975,(22):273~303.

[5] 张宏伟,呼青英.一类耦合非线性 Klein-Gordon 方程组的稳定集和不稳定集[J].纯粹数学与应用数学,2002,18(3):207~210.

[6] 陈勇明,张正萍,唐恒书.一类非线性波方程解的爆破[J].重庆工学院学报,2003,17(6):38~39,49.

(上接第151页)

1) 如果 $Q \cap J_i \neq \Phi$,则 $V(Q:(\sum J_i)) = \Phi$;

2) 如果 $Q \cap J_i = \Phi$,则 $Q:(\cap J_i)$ 是 P-准素理想;

3) 如果 $J_i \cap P = \Phi$,则 $V(Q:(\cap J_i)) = V(Q)$.

参考文献:

[1] 何青.计算代数(M).北京:北京师范大学出版社,1997.95~198.

[2] 刘木兰.Gröbner基理论及其应用(M).北京:科学出版社,2000.15~78;77~78.

[3] Bhubaneswar Mishra.Algorithmic Algebra(M).Spring-Verlag.New York,Inc,1993.

[4] 贾双盈.关于交换环中理想的商(J).西安公路交通大学学报,1998.