

参考椭球大小可变的高斯大地解算方法研究

施 昆, 陈云波, 陈永刚, 丁仁军, 字成波
(昆明理工大学 国土资源工程学院, 云南 昆明 650093)

摘要: 参考椭球的 a, b 可变带来的直接问题便是大地计算模型中 X 和 B_f 参数难于求解. 本文提出了参考椭球的 a, b 可变的一种大地正算和大地反算的新算法. 推导了算法的基本公式并设计了计算流程, 在此基础上, 编制了相应的计算机计算程序, 并进行了初步的计算, 得出了满意的结果.

关键词: 高斯大地正算和大地反算; 参考椭球大小可变; 数学模型; 辛普生积分法

中图分类号: P228; P216 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-855X(2004)05-0001-05

A New Approach to the Translation Computations between Ellipsoid and Gauss Projection Plane with Variable Size Parameter of Ellipsoid

SHI Kun, CHEN Yun-bo, CHEN Yon-gang, DING Ren-jun, ZI Chen-bo

(Faculty of Land Resource Engineering, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, China)

Abstract: If the size parameters a and b are variable, the direct problem in translation computations between ellipsoid and Gauss projection plane is that the parameters of X and B_f would not be easy to be gotten. A new method to carry out the translation computations between ellipsoid and Gauss projection plane directly and scientifically has been put forward. With the help of modern geodesy techniques, adjustment theory and computational techniques, a set of new formula for the calculations are put forward and the calculation process is planned on computers. Based on the theory and model, a sample is used to test the theory and model with the computer program produced in this research project. Finally, some positive suggestions and conclusions are put forward for the mathematic model.

Key words: translation computations between ellipsoid and Gauss projection plane; variable size parameter of ellipsoid; mathematic model; Simpson integration

0 引 言

高斯大地计算由高斯大地正算和大地反算两部分组成. 其主要的目的是在两个不同的坐标空间进行变换. 高斯大地正算是实现从参考椭球到平面坐标的变换; 高斯大地反算是实现从平面坐标到参考椭球上坐标的变换. 高斯大地计算的目的是建立二者之间的换算关系.

从 $A(B, L)$ 到 $B(x, y)$ 称为“高斯大地正算”; 从 $B(x, y)$ 到 $A(B, L)$ 称为“高斯大地反算”.

高斯大地正算的数学模型为^[4,5]:

$$\begin{aligned} X &= F(B, L) \\ Y &= G(B, L) \end{aligned} \quad (1)$$

高斯大地反算的数学模型为:

$$\begin{aligned} B &= f(x, y) \\ L &= g(x, y) \end{aligned} \quad (2)$$

大地测量学中常用高斯-克吕格投影, 高斯正算和反算的数学模型分别为:

收稿日期: 2003-11-18. 基金项目: 云南省自然科学基金项目(No. 2002D0018M).

第一作者简介: 施 昆(1959~), 男, 教授. 主要研究方向: GPS 大地测量.

1) 高斯正算的数学模型^[4,5]

$$x = X + 1/2Nt\cos^2 B l^2 + 1/24Nt(5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4)\cos^4 Bl^4 + 1/720Nt(61 - 58t^2 + t^4 + 270\eta^2 - 330\eta^2 t^2)\cos^6 Bl^6 \quad (3)$$

$$y = N\cos B l + 1/6N(1 - t^2 + \eta^2)\cos^3 B l^3 + 1/120N(5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58\eta^2 t^2)\cos^5 Bl^5 \quad (4)$$

2) 高斯反算的数学模型^[4,5]

$$B = B_f - t_f y^2 / 2M_f N_f + t_f(5 + 3t_f^2 + \eta_f^2 - 9\eta_f^2 t_f^2) y^4 / 24M_f N_f^3 - t_f(61 + 90t_f^2 + 45t_f^4) y^6 / 720M_f N_f^5 \quad (5)$$

$$l = y / N_f \cos B_f - (1 + 2t_f^2 + \eta_f^2) y^3 / 120N_f^5 \cos B_f + (5 + 28t_f^2 + 24t_f^4 + 6\eta_f^2 + 8\eta_f^2 t_f^2) y^5 / 120N_f^5 \cos B_f \quad (6)$$

$$L = L_0 + l \quad (7)$$

1 大地模型主要参数 X 和 B_f 模型的建立

由于工程网和城市网的特殊性,导致了建立这类坐标系统的必要性^[1].但这类地方坐标系与国家大地坐标系是不一致的.也就是说,二者之间参考椭球的长、短半轴 a, b 的值不一样.我国规定地方局部坐标系与国家大地坐标系相联系的条件是:起始坐标为国家大地坐标系中一点的坐标,起始方位为国家大地坐标系的方位.

参考椭球的 a, b 可变带来的直接问题便是大地计算模型中 X 和 B_f 参数难于求解.纵观以往资料,常用的做法是 X 和 B_f 采用固定的椭球 a, b 参数,然后用级数展开的方法求解.由此可见,直接采用参阅资料上的现有公式在任意椭球上计算是行不通的.因而,求解通用的 X 和 B_f 参数的计算模型是本文的主要任务.

1.1 大地子午线弧长 X 模型的建立

X 为从赤道到该点的子午线的弧长^[2].其中 P 点与 Q 点位于同一纬度上.如图1.

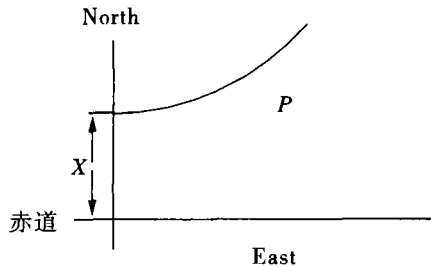


图1 从赤道到该点的子午线的弧长
Fig.1 The are length from the equator to the PQ latitude

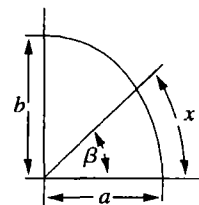


图2 沿着参考椭球的旋转轴的剖面图
Fig.2 Section profile along the rotation axes of reference ellipsoid

从赤道到点 P 的子午线弧长^[3,4].

由上图2可知, X 为 B 的函数 $X(B)$.

$$X(B) \int_0^B dX = \int_M^B (X) dX \quad (8)$$

其中 B 为大地纬度, $X(B)$ 为大地子午线弧长函数, $M(B)$ 为大地子午线曲率半径.众所周知, $M(B)$ 为一随着 B 值而改变的函数.

$$M(B) = \frac{a^2 b^2}{(a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)^{3/2}} \quad (9)$$

由(8)和(9),可知.

$$X(B) = \int_0^B \frac{a^2 b^2}{(a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)^{3/2}} dB \quad (10)$$

1.2 垂足纬度 B_f 模型的建立

B_f 称为垂足纬度或底点纬度^[3,4]. 如图 3 所示.

过待算点 P 作中央子午线的垂线 PP' . OP' 弧所对应的弧度即为 B_f .

$$X_{op'} = \int_0^{B_f} dX = \int_0^{B_f} M dX \quad (11)$$

公式(11) 即表明了 $X_{op'}$ 和 B_f 之间的数学关系. 为了求 B_f 我们作如下数学变形.

对(11) 式两端求微分, 则

$$dX_{op'} = M dB_f \quad (12)$$

M 移到等式的左边, 得

$$dB_f = \frac{dX_{op'}}{M} \quad (13)$$

对(13) 等式两边同求积分, 得

$$B_f = \int_0^{X_{op'}} \frac{dX_{op'}}{M} \quad (14)$$

上式即为求解垂足纬度 B_f 的模型. 利用它就可反推 B_f 的值.

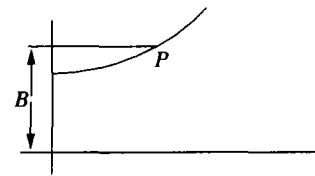


图3 B_f 底点纬度
Fig.3 Bottom latitude of B_f

2 大地模型主要参数 X 和 B_f 模型的计算机求解

现在, 我们利用上面推导的模型, 借助计算机工具进行高斯大地正、反算计算.

我们知道计算机不能进行连续函数的计算, 它只能计算离散性函数. 因而, 我们首要解决的问题是: 连续函数的离散化, 以使其可以进行计算机解算. 另外, 我们知道积分问题其实是: 一个连续相加问题的无穷极限. 例如:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \quad (15)$$

说明: a, b 分别是积分的上下限, n 是对区间 (a, b) 的等分数目.

根据《数值计算》^[6] 的内容, 我们了解到计算机可以对 $\int_a^b f(x) dx$ 型积分离散化后进行计算, 结果是无

限趋近理论值的一个近似值. 经常采用的方法是下面两种: 矩形积分法和辛普生积分法. 但辛普生积分法更为合理有效, 下面予以介绍.

辛普生积分法^[6]:

辛普生积分法是以相邻的几个离散点连续化即利用插值的方法来近似趋近 $\int_a^b f(x) dx$ 的理论值.

辛普生积分法是一种良好的积分方法. 它近似度高, 占用计算时间较少. 但算法难度较上面的两种方法而言有所提高. 要进行离散点的插值. 这就要有插值方面的知识. 说明如下.

假设有一函数 $y = f(x)$. 它在 x_0, x_1, x_2 三点对应有三个函数值 f_0, f_1, f_2 . 我们可以用以上三点来构造一个函数 $F(x)$ 来近似 $y = f(x)$.

$$F(x) = f_0 \times l_0 + f_1 \times l_1 + f_2 \times l_2 \quad (16)$$

l_i 为“基函数”. 它的表达式如下.

$$l_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad (17)$$

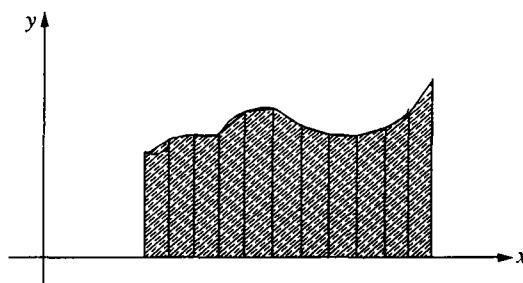


图4 辛普生积分法的直观理解
Fig.4 Directive understanding of simpson's integration

用(16)、(17)可以完成插值.然后,对(16)式进行局部积即可.右边的示意图为辛普生积分法的直观理解.

3 子午线弧长 X 模型的计算机求解

下面将讨论子午线弧长 X 的计算机实现.我们将利用(17)式来作为下面计算的最初出发点.

为了求解子午线弧长 X ,则必须求解出 ΔB . ΔB 是把 B 求 n 等分的值,即 $\Delta B = B/n$.为了使计算精度足够高, ΔB 要相当的小, n 值要足够的大.理论上, $n \rightarrow +\infty$ 时计算值才收敛于其积分值.

n 常用的简便算法是取一个很大的数,如:令 $n = 10^5$.但是,很明显这里有极大的弊端.例如,若 B 值很小,经 $n = 10^5$ 次等分以后会变得相当的小.本来早已满足要求却又要继续划分,直接导致的后果便是浪费了宝贵的计算时间.同理可知,若 B 值很大,则 $n = 10^5$ 等分显得太粗糙了.计算的最终结果满足不了应该达到的要求.

综上所述,粗略的把 n 看作一个定值来划分是极不合理的.自动根据 B 值的大小来调整 n 值大小的算法则是必不可少的了.

自动选取 n 算法用框图(如图5)描述如右.

用 Basic(For VB6.0)语言描述如下:

```
Dim B-arc as Double      'B-arc 为 B 值
Dim N as Double         'N 为划分的数目
Dim Unit-B as Double    'Unit-B 为  $\Delta B$ 
N = 100
```

Loop

```
Unit-B = B-arc/Cdbl(N)
```

```
N = 2 * N      '使 N 值作倍增
```

```
While(Unit-B > limit)
```

'limit 在(*.bas)文件中声明;limit 是计算精度所决定的 ΔB 的限定值

上面的一小段程序的作用是自动调整 N 的大小,以保证 ΔB 的大小满足精度的要求.

下面的工作将计算大地子午线弧长 X 值.我们采用的积分方法是梯形积分法.该模块用 Basic 语言描述如下:

```
N = N/2      '消除最后一次倍增值
Dim X-sum as Double      'X-sum 的值即为 x
For I = 1 to N
X-sum = 0.0
X-sum = X-sum + Unit-B * (M(I-1) + M(I))/2 #
'M(I)为一函数,在(*.bas)文件中声明
Next I
```

以上的一段程序是计算大地子午线弧长 X 值的核心部分.中涉及了梯形积分法和函数调用等内容.

下面的这小段程序是函数 $M(I)$ 的代码.它位于(*.bas)文件中.

```
Public Function M(I as Long) as double
M = (a * b)^2 # / ((a * Cos(Cdbl(I) * Unit-B))^2 # + (b * Sin(-Cdbl(I) * Unit-B))^2 #)^1.5
End Function
```

该段程序是计算任一点的大地子午线曲率半径 M 由上面两段核心小程序和模型(15)、(16)即可进行大地正算.

垂直纬度 B_f 模型的计算机求解.同上面的思路,我们现在利用点的横坐标 x 来反算垂直纬度 B_f .反推 B_f 用的具体思路是(13)式.离散化以后的表达式为如下所示.

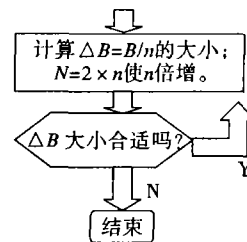


图5 自动选取 n 算法框图
Fig.5 Computation procedure for automatically selecting n

$$B_f = \sum_1^n \frac{\Delta X_{opf}}{M} \tag{18}$$

同求大地子午线弧长 X 的解法. 首要, 解决的问题是 ΔX_{opf} 的划分问题, 即点的横坐标 x 的 n 等分问题.

$$\Delta X_{opf} = x/n \tag{19}$$

下面用 Basic For VB6.0 描述如下.

```
Dim NN as Long
```

```
NN = 100
```

```
Dim x-limit as Double
```

```
Loop
```

```
x-limit = x/Cdbl(NN)
```

```
NN = 2 * NN
```

```
While(x-Unit > x-limit)
```

‘x-Limit 在标准模块(*.bas)中声明, x-Limit 是限定计算精度的值.

下面的问题是如何根据 x 的值来反推垂足纬度 B_f 的值. 理论根据是模型(14) 和(18) 式.

```
NN = NN/2 ‘消除最后一次的倍增
```

```
Dim B-f as Double
```

```
B-f = 0.0
```

```
For I = 1 to NN Step 1
```

```
B-f = B-f + Unit-x/MM(B-f)
```

```
Next I
```

‘计算垂足纬度 B_f 的值的程序段

其中 MM(B-f)是调用的函数. 下面的程序段是 MM()函数的原代码.

```
Public Function MM(B as Double) as Double
```

```
MM = (a * b)^2 # / ((a * Cos(B))^2 + (b * Sin(B))^2 #)^1.5
```

```
End Functin
```

‘MM()函数的代码

4 算 例

下面对该程序进行测试, 测试算例情况如下.

4.1 高斯大地正算

A. 输入数据

B	51°38' 43.902 3"
L	126°2' 13.136 0"
L_0	123°

B. 计算结果

X	5 728 374.550 042 99
Y	710 198.200 472 268

4.2 高斯大地反算

A. 输入数据

X	5 728 374.550 042 99
Y	710 198.200 472 268
N	21

B. 计算结果

B	51°38' 43.902 305 146"
L	126°2' 13.124 133 63"
L_0	123°

1. 计算误差

$m_B = 0.000 005 146''$, $m_L = 0.011 866 37''$

(下转第 12 页)

和科普教育基地逐步开发.

参考文献:

- [1] 冯鸿儒,梁婷.试论观赏石的分类与发展前景[J].西安地质学院学报,1992,14(1):88~90.
- [2] 张保民,沈上越,魏启荣.金沙江南段蛇绿岩特征研究[J].地质实验室,1996,12(2):98~108.
- [3] 杨世瑜.三江并流带旅游地质资源开发与环境保护[M].昆明:云南民族出版社,2003,8:302~350.
- [4] 赵彻终.三江地区中南段宝玉石资源[J].有色金属矿产与勘查,1997,6(2):121~128.
- [5] 范弢.滇西北三江并流带宝玉石资源研究[J].昆明理工大学学报(理工版),2004,29(1):11~16.

(上接第5页)

2. 地球参数

a	6 378 245.00
b	6 356 863.018 773 047 3

由上面的测试结果可以看出它的计算精度满足要求.同时,它还满足地方坐标系的计算.地方坐标系建立的标准是每千米投影变形,变形由中央子午线选择和平均投影高程面选择两项引起.

可见,以上的变椭球计算是本程序的最大优点.它解决了固定椭球参数求解的最大弊端.

6 总 结

本文提出了新的利用自动划分和数值积分实现高斯大地正、反算的方法,舍弃了传统的固定椭球长短半轴 a, b 按级数展开的方法.使该程序更具有适用性和通用性.高斯大地正算适用于任意椭球任意带任意地区的计算;高斯大地反算适用于中国地区 3° 和 6° 标准带任意椭球的计算.本文解决了用辛普生积分法进行任意椭球的高斯大地正、反算问题,并运用 VB6.0 实现了其计算功能.

参考文献:

- [1] 邱云峰.不同投影归算面间的坐标换算[J].北京:测绘通报,2001,(9):12~13.
- [2] 地图制图《地图制图》编写组[M].北京:地图出版社,1980.98~102.
- [3] 熊介.椭球大地测量学[M].北京:解放军出版社,1988.75~87.
- [4] 测量全书.第四卷(第二分册)[M].北京:中国工业出版社,1966.112~118.
- [5] 陈建.椭球大地测量学[M].北京:测绘出版社,1989.58~67.
- [6] 冯康.数值计算方法[M].北京:国防工业出版社,1978.236~247.