周期三对角 Toeplitz线性方程组的并行算法

崔喜宁, 吕全义
(西北工业大学 应用数学系,陕西 西安 710072)

摘要: 提出一种求解一类周期三对角 Toeplitz线性方程组的并行算法. 此算法的计算复杂性为 $O(5n)$,通讯复杂性为 $O(1)$,并给出了误差分析. 在 HP xr2600集群上的试验结果表明其并行效率可达 90%以上.

关键词: 并行算法;周期三对角 Toeplitz线性方程组; HP rx2600集群
中图分类号: TP301. 6 **文献标识码**: A **文章编号**: 1007 - 855X(2005) 05 - 0114 - 06

Parallel Algorithm of a Certain Toeplitz Linear Equation Set on Distributed - Memory Multicomputers

CUI Xi-ning, LV Quan-yi
(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi′an 710072, China)

Abstract: A parallel algorithm for solving a certain cyclic tri - diagonal Toeplitz linear systems on distributed - memory multi - computers is presented. The calculation complexity is $O(5n)$, and the communication complexity is $O(1)$. The error analysis is given. Moreover, it is shown through experiments on HP rx2600 cluster that the parallel efficiency of the algorithm can reach more than 90%.

Key words: parallel algorithm; toeplitz linear equation set; HP rx2600 cluster

0 引 言

在构造具有周期边界条件的 3次样条函数或用差分法求解具有周期边界的微分方程等问题中,要遇到周期三对角 Toeplitz线性方程组的求解. 文中给出一种利用修正的方法求解此类 Toeplitz线性方程组并行算法. 通过对矩阵进行分裂,并行的计算出方程组的近似解,利用[1]的基本思想,进行修正得出最终的近似解. 并给出了误差分析. 此算法的计算复杂性为 $O(5n)$,通讯复杂性为 $O(1)$. 通过在 HP rx2600集群上的数值试验表明,并行效率达 90%以上.

1 串行解法

设周期三对角 Toeplitz线性方程组

$$Ax = f \tag{1}$$

其中 $A = \begin{pmatrix} a & b & & & u \\ c & a & b & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c & a & b \\ w & & & c & a \end{pmatrix}$ A为 n阶方阵,且 $|a| > |b| + |c|$.

假设 $|b| \le |c|$,则 (1) 式两端同除以 b可使 (1) 式转化为

$$\bar{A}x = \bar{f} \tag{2}$$

收稿日期: 2004 - 12 - 23.
第一作者简介:崔喜宁 (1974. 9～),女,在读硕士研究生. 主要研究方向:信息处理中的快速与并行算法.
E - mail: cxnnwpu@163. com

其中 $\bar{A} = \frac{1}{b}A = \begin{pmatrix} a' & 1 & & & u' \\ c' & a' & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c' & a' & 1 \\ w' & & & c' & a' \end{pmatrix}$, $\bar{f} = \frac{1}{b}f = \begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \\ \cdots \\ \cdots \\ f_n' \end{pmatrix}$. 则知: $|c'| \geq 1,\ |a'| > 1 + |c'|$

若 $|b| > |c|$时, (1)式两端同乘以 n阶次单位矩阵 J,即满足上述假设. 为此,以下我们就针对 $|b| \leq |c|$的情况进行推导.

首先,分裂为 $\bar{A}$

$$\bar{A} = S + F \tag{3}$$

其中 $S = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & & \\ c' & a' & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c' & a' & 1 \\ & & & c' & a' \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} -\beta & 0 & \cdots & 0 & u' \\ 0 & 0 & & & 0 \\ \cdots & & \ddots & & \cdots \\ 0 & & & 0 & 0 \\ w' & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$,取 α和 β满足

$$\begin{cases} \alpha - \beta = a' \\ -\alpha\beta = c' \end{cases} \tag{4}$$

由 (4)求出 $\beta = \frac{-a' \pm \sqrt{a'^2 - 4c'}}{2}$,在此要求取 $|\beta| < 1$的解为 β,且分解矩阵 S有

$$S = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -\beta & 1 & & & \\ & -\beta & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & & \\ & \alpha & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \alpha & 1 \\ & & & & \alpha \end{pmatrix} \tag{5}$$

然后求解方程组

$$Sx' = \bar{f}$$

因为 $\bar{A}x' = (S + F)x' = \bar{f} + Fx' = \bar{A}x + Fx'$,由此可得

$$x = x' - \bar{A}^{-1}Fx' = x' - \bar{A}^{-1}((u'x_n' - \beta x_1')e_1 + w'x_1'e_n) \tag{6}$$

其中, e_i表示第 i个分量为 1,其余分量全为 0的 n维列向量.

所以,在此只需求出以下两个方程组

$$\bar{A}h = -e_1,\ \bar{A}q = -e_n$$

(6)式即为

$$x = x' + (u'x_n' - \beta x_1')h + w'x_1'q \tag{7}$$

为此,取 $h_1 = (\beta, \beta^2, \cdots, \beta^t, 0, \cdots, 0)^T$, $q_1 = (0, \cdots, 0, \lambda^t, \cdots, \lambda^2, \lambda)^T$,其中 λ为 $c'\lambda^2 + a'\lambda + 1 = 0$中 $|\lambda| < 1$的根. 即 $\lambda = \frac{\beta}{c'}$,计算可得,

$$\bar{A}h_1 = -c'e_1 + w'\beta e_n - \beta^{t+1}e_t + c'\beta^t e_{t+1}$$

$$\bar{A}q_1 = u'\lambda e_1 - e_n + \lambda^t e_{n-t} - c'\lambda^{t+1}e_{n-t+1}$$

所以知,

$$\frac{1}{c' - w'u'\beta\lambda}\bar{A}(h_1 + w'\beta q_1) = -e_1 + \frac{\beta^t}{c' - w'u'\beta\lambda}(c'e_{t+1} - \beta e_t) + \frac{w'\beta\lambda^t}{c' - w'u'\beta\lambda}(e_{n-1} - c'\lambda e_{n-t+1})$$

$$\frac{1}{c' - w'u'\beta\lambda}\bar{A}(u'\lambda h_1 + c'q_1) = -e_n + \frac{u'\lambda\beta^t}{c' - w'u'\beta\lambda}(c'e_{t+1} - \beta e_t) + \frac{c'\lambda^t}{c' - w'u'\beta\lambda}(e_{n-1} - c'\lambda e_{n-t+1})$$

取 $h \approx \frac{1}{c' - w'u'\beta\lambda}(h_1 + w'\beta q_1)$, $q \approx \frac{1}{c' - w'u'\beta\lambda}(u'\lambda h_1 + c'q_1)$代入 (7)式可得 x的近似解 $\bar{x}$

$$\bar{x} = x' + \frac{u'x'_n - \beta x'_1}{c' - w'u'\beta\lambda}(h_1 + w\beta q_1) + \frac{w'x'_1}{c' - w'u'\beta\lambda}(u\lambda h_1 + c'q_1) \tag{8}$$

2 并行算法

不妨假设 $n = pm\ (m \geq 2, m \in Z^+)$ 且处理机台数为 p,记第 i台处理机为 $p_i\ (i = 1, 2, \cdots, p)$. 将 $\bar{A}$进行如下分裂

$$\bar{A} = S + F \tag{9}$$

其中, $S = \begin{pmatrix} S_1 & & & \\ & S_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & S_p \end{pmatrix}$ (m阶方阵 $S_i\ (i = 1, 2, \cdots, p)$ 形如 (3) 中的 S).

$$F = \begin{pmatrix} -\beta & 0 & & & & & & & & & u' \\ 0 & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & & & & \\ & & c' & -\beta & 0 & & & & & & \\ & & & 0 & \ddots & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & \ddots & 1 & & & \\ & & & & & & c' & -\beta & 0 & & \\ & & & & & & & 0 & \ddots & & \\ w' & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

首先并行求解方程组 (即每台处理机计算 (5) 式作为系数矩阵的 m阶线性方程组)

$$Sx' = \bar{f} \tag{10}$$

同第二部分的推导可得:

$$\begin{aligned} x &= x' - \bar{A}^{-1}F(x') \\ &= x' - \bar{A}^{-1}\left((u'x'_n - \beta x'_1)e_1 + \sum_{i=2}^{p}\left(x'_{(i-1)m+1}e_{(i-1)m} + (c'x'_{(i-1)m} - \beta x'_{(i-1)m+1})e_{(i-1)m+1} \right) + w'x'_1 e_n \right) \end{aligned} \tag{11}$$

以下只需计算 $\bar{A}g_j = -e_j\ (j = 1, m, m+1, 2m, 2m+1, \cdots, (p-1)m, (p-1)m+1, n)$.

(11) 式即为

$$x = x' + \left((u'x'_n - \beta x'_1)g_1 + \sum_{i=2}^{p}\left(x'_{(i-1)m+1}g_{(i-1)m} + (c'x'_{(i-1)m} - \beta x'_{(i-1)m+1})g_{(i-1)m+1} \right) + w'x'_1 g_n \right) \tag{12}$$

令, $h_i = \left(\overbrace{0,\cdots,0}^{(i-1)m}, \beta, \beta^2, \cdots, \beta^t, 0, \cdots, 0\right)^T$, $q_i = \left(\overbrace{0,\cdots,0}^{im-t}, \lambda^t, \cdots, \lambda^2, \lambda, 0, \cdots, 0\right)^T$, ,

其中 $h_i, q_i\ (i = 1, \cdots, p)$ 是 n维列向量,计算可得,

$$\bar{A}h_1 = -c'e_1 + w\beta e_n - \beta^{t+1}e_t + c\beta^t e_{t+1}$$

$$\bar{A}h_i = -\beta e_{(i-1)m} - c'e_{(i-1)m+1} + \beta^{t+1}e_{(i-1)m+t} + c\beta^t e_{(i-1)m+t+1} \quad (i = 2, \cdots, p)$$

$$\bar{A}q_{i-1} = -e_{(i-1)m} - c\lambda e_{(i-1)m+1} + \lambda^t e_{(i-1)m-t} - c\lambda^{t+1}e_{(i-1)m-t+1} \quad (i = 2, \cdots, p)$$

$$\bar{A}q_p = u\lambda e_1 - e_n + \lambda^t e_{n-t} - c\lambda^{t+1}e_{n-t+1}$$

所以

$$\frac{1}{c' - w'u'\beta\lambda}\bar{A}(h_1 + w\beta q_p) = -e_1 + \frac{\beta^t}{c' - w'u'\beta\lambda}(c'e_{t+1} - \beta e_t) + \frac{w\beta\lambda^t}{c' - w'u'\beta\lambda}(e_{n-1} - c\lambda e_{n-t+1})$$

$$\frac{1}{c'-wu'\beta\lambda}\bar{A}(u\lambda h_1+c'q_p)=-e_n+\frac{u\lambda\beta^t}{c'-wu'\beta\lambda}(c'e_{t+1}-\beta e_t)+\frac{c\lambda^t}{c'-wu'\beta\lambda}(e_{n-1}-c\lambda e_{n-t+1})$$

$$\frac{1}{1-\beta\lambda}\bar{A}(q_{i-1}+\lambda h_1)=-e_{(i-1)m}+\frac{\lambda^t}{1-\beta\lambda}(e_{(i-1)m-t}-\beta e_{(i-1)m-t+1})+\frac{\lambda\beta^t}{1-\beta\lambda}(c'e_{(i-1)m+t+1}-\beta e_{(i-1)m+t})$$

$$\frac{1}{c'(1-\beta\lambda)}\bar{A}(\beta q_{i-1}+h_1)=-e_{(i-1)m+1}+\frac{\lambda^t\beta}{c'(1-\beta\lambda)}(e_{(i-1)m-t}-\beta e_{(i-1)m-t+1})+\frac{\beta^t}{c'(1-\beta\lambda)}(c'e_{(i-1)m+t+1}-\beta e_{(i-1)m+t})$$

其中 $i=2,\cdots,p$

取 $g_1\approx\frac{1}{c'-wu'\beta\lambda}(h_1+w\beta q_p)$, $g_n\approx\frac{1}{c'-wu'\beta\lambda}(u\lambda h_1+c'q_p)$, $g_{(i-1)m}\approx\frac{1}{1-\beta\lambda}(q_{i-1}+\lambda h_i)$, $g_{(i-1)m+1}\approx\frac{1}{c'(1-\beta\lambda)}(\beta q_{i-1}+h_i)$ $(i=2,\cdots,p)$

代入 (12) 式得 x的近似解 $\bar{x}$为

$$x=x'+\sum_{i=2}^{p}\left(\frac{x'_{(i-1)m+1}}{1-\beta\lambda}(q_{i-1}+\lambda h_i)+\frac{c'x_{(i-1)m}-\beta x_{(i-1)m+1}}{c'(1-\beta\lambda)}\bar{A}(\beta q_{i-1}+h_i)\right)+\frac{u'x'_n-\beta x'_1}{c'-wu'\beta\lambda}(h_1+w\beta q_p)+\frac{w'x'_1}{c'-wu'\beta\lambda}(u\lambda h_1+c'q_p) \tag{13}$$

3 误差分析

我们对前所述的算法进行误差分析

定理　在 $c'-wu'\lambda\beta\neq 0$时,由式 (13) 得到的该算法的近似解 $\bar{x}$满足

$$\left\|\bar{A}\bar{x}-\bar{f}\right\|_\infty\leq\frac{|\beta|^t}{1-\lambda\beta}\|x'\|_\infty\max\left\{\frac{2|c'|(|u'|+|wu'|+1)}{|c'-wu'\lambda\beta|},\frac{|w'|(|u'|+|c'|+1)}{|c'-wu'\lambda\beta|},3,|c'|\right\} \tag{14}$$

证明　因为

$$\bar{A}\bar{x}-\bar{f}=\frac{(u'x'_n+(wu'\lambda-\beta)x_1')\beta'}{c'-wu'\lambda\beta}(c'e_{t+1}-\beta e_1)+\frac{w'(u\beta x_n'+(c'-\beta^2)x_1')\lambda^t}{c'-wu'\lambda\beta}(e_{n-t}-\beta e_{n-t+1})+\sum_{i=2}^{p}\left(\frac{((1-\lambda\beta)x'_{(i-1)m+1}+\beta x'_{(i-1)m}\lambda^t}{1-\beta\lambda}(e_{(i-1)m-t}-\beta x_{(i-1)m-t})+\frac{x_{(i-1)m}\beta^t}{1-\beta\lambda}(c'e_{(i-1)m+t+1}-\beta e_{i-1}m+t)\right)$$

我们取向量的无穷范数,且在 $c'-wu'\lambda\beta\neq 0$时可得到

$$\left\|\bar{A}\bar{x}-\bar{f}\right\|_\infty\leq\frac{|\beta|^t}{1-\lambda\beta}\max\left\{\frac{(1-\lambda\beta)|c'|\left|u'x_n'+(wu'\lambda-\beta)x_n'\right|}{|c'-wu'\lambda\beta|},\frac{|w'|\left|u\beta x_n'+(c'-\beta^2)x_1'\right|}{|c'-wu'\lambda\beta||c'|^t},\frac{(1-\lambda\beta)x'_{(i-1)m+1}+\beta x'_{(i-1)m}}{|c'|^t},|c'|\left|x'_{(i-1)m}\right|\right\}\quad(i=2,\cdots,p)$$

$$\leq\frac{|\beta|^t}{1-\lambda\beta}\|x'\|_\infty\max\left\{\frac{2|c'|(|u'|+|wu'|+1)}{|c'-wu'\lambda\beta'|},\frac{|w'|(|u'|+|c'|+1)}{|c'-wu'\lambda\beta|},3,|c'|\right\}$$

证毕.

由此可见, $\bar{x}3$的好坏直接取决于 t的大小. 若要求 $\left\|\bar{A}\bar{x}-\bar{f}\right\|_\infty\leq 10^{-k}$,只需

$$\frac{|\beta|^t}{1-\lambda\beta}\|x'\|_\infty\max\left\{\frac{2|c'|(|u'|+|wu'|+1)}{|c'-wu'\lambda\beta'|},\frac{|w'|(|u'|+|c'|+1)}{|c'-wu'\lambda\beta|},3,|c'|\right\}\leq 10^{-k}$$

可得 t的范围.

设 $\max=\max\left\{\frac{2|c'|(|u'|+|wu'|+1)}{|c'-wu'\lambda\beta'|},\frac{|w'|(|u'|+|c'|+1)}{|c'-wu'\lambda\beta|},3,|c'|\right\}$

$$t \geq \frac{\lg(1-\lambda\beta)-k-\lg\max-\lg\|x'\|_\infty}{\lg|\beta|} \quad (15)$$

由于要求 $m>t$,所以若要达到精度,矩阵的阶数应取得大一些. 其次,若要求得理想的精度,只需求得适当大的 t理论上即可满足要求.

若 $u=w=0$时,就是三对角 Toeplitz线性方程组的情况. 若 $b=c$时,即为对称三对角 Toeplitz的情况. 该算法对以上两种特殊的矩阵均实用.

4 数值试验

我们应用此算法在 HP rx2600集群上进行数据试验如下

例 1 已知阶周期三对角 Toeplitz矩阵 A及右端项 f有

$$A=\begin{pmatrix} -2-\frac{3}{50^2} & 0.99 & & & 1 \\ 1.01 & -2-\frac{3}{50^2} & 0.99 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1.01 & -2-\frac{3}{50^2} & 0.99 \\ 1.2 & & & 1.01 & -2-\frac{3}{50^2} \end{pmatrix},\quad f=\begin{pmatrix} 0.025 \\ 0.025 \\ \cdots \\ \cdots \\ 0.025 \\ 0.025 \end{pmatrix}$$

在容差为 $\varepsilon \leq 10^{-8}$时的计算结果如表 1所示.

例 2 已知阶三对角 Toeplitz矩阵 A及右端项 f有:

$$A=\begin{pmatrix} -2-\frac{3}{50^2} & 0.99 & & & \\ 1.01 & -2-\frac{3}{50^2} & 0.99 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1.01 & -2-\frac{3}{50^2} & 0.99 \\ & & & 1.01 & -2-\frac{3}{50^2} \end{pmatrix},\quad f=\begin{pmatrix} 0.025 \\ 0.025 \\ \cdots \\ \cdots \\ 0.025 \\ 0.025 \end{pmatrix}$$

在容差为 $\varepsilon \leq 10^{-8}$时的计算结果如下:

表 1 计算结果(例 1)

Tab. 1 Computing results for example 1

处理机台数	1	2	4	6	8
时间 /s	3.210 1	1.713 6	0.863 3	0.572 0	0.426 1
效率		0.936 7	0.929 6	0.935 3	0.941 7
加速比		1.873 4	3.718 4	5.611 8	7.533 6

表 2 计算结果(例 2)

Tab. 2 Computing results for example 2

	1	2	4	6	8
时间 /s	3.248 8	1.710 7	0.856 3	0.572 3	0.433 9
效率		0.949 6	0.948 5	0.946 1	0.935 9
加速比		1.899 2	3.794 0	5.676 6	7.487 2

从数值试验结果可看到此算法的效率可达到 90%以上. 并且随着处理机台数的增加,并行效率并无降低,具有良好的并行性. 由于修正时的计算误差,实际中计算的精度不会无限的提高.

5 结 论

基于文献[1]的思想,给出一种高效并行求解一类周期三对角 Toeplitz线性方程组的算法,方法简单,计算量小,通讯量少,具有良好的并行性.

致谢 文中的计算得到西北工业大学高性能计算研究与发展中心的大力支持,在此表示感谢!

参考文献:

[1] Garey L E, Shaw R E. A parallel algorithm for solving Toeplitz linear systems[J]. Applied Mathematics and Computation, 1999, 100(2～3): 241～247.

[2] 徐仲,张凯院,陆全. Toeplitz矩阵类的快速算法[M]. 西安:西北工业大学出版社, 1999. 101～151.

[3] McNally J M, Garey L E, Shaw R E. A split-correct algorithm for solving tridiagonal symmetric Toeplitz systems[J]. Int'l J. of Computer Math, 2000, 75(3): 303～313.

[4] Nemani S S, Garey L E. Parallel algorithms for solving tridiagonal and near-circulant systems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2002, 130(2～3): 285～294.

[5] Garey L E. A parallel numerical algorithm for near symmetric and banded systems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2001, 119(1): 99～108.

(上接第 105页)

2.5 改变了成本、组织赢利能力的含义

成本是指顾客与组织或组织成员交易中发生的所有费用和付出,包括金钱、时间、精力和其它有关身心的损耗. 过去,我们所理解的成本较多地局限于企业的“生产成本”,较多地“以我为中心”来计算花费了多少人力和物力,而不是从消费者角度考虑其所能承受的产品成本;另外,以前的成本较少甚至没有考虑到对顾客身心的损伤或伤害. 只有充分认识到成本的组成要素,才有可能实现顾客满意甚至顾客惊喜.

企业赢利能力是指企业与外部顾客双赢的能力. 过去,我们认为企业的赢利能力就是企业获取利润的能力[4]. 利润仅仅是一定时期的结果,或许是企业单赢的结果,或许是企业双赢的结果. 如果是企业单赢,则企业不可能具有长期赢利能力. 只有顾客满意了,企业才会获得双赢,获得长期的发展. 一个健康企业的主要标志,就是它拥有较高的顾客满意度指数,并持续上升. “顾客满意是企业未来利润的最好指示器”.

3 结 论

市场营销学是一门研究“商品交换”的学科. CS理论作为市场营销学的重要理论,它从顾客角度研究了如何促进“交换”,改变了人们以前的“生产观”或“产品观”. 随着 CS理论的发展,它将继续推进市场营销学的发展. 同时,随着市场营销学的日益丰富, CS理论也将不断完善. 不管是“产品”和“顾客”外延、产品质量标准和成本概念的变化,还是企业经营准则、管理重心和组织赢利能力的变化,以及营销管理哲学、营销组合的变化,它们都会对营销学的本质“商品交换”产生深远的影响.

参考文献:

[1] 孙丽辉. 顾客满意理论研究[J]. 东北师范大学学报(哲学社会科学版), 2003, (4): 18～23.

[2] 江林. 现代市场营销管理[M]. 北京: 电子工业出版社, 2002. 2～3.

[3] 李正权. 顾客满意——一种新的质量观[J]. 质量管理, 2003, (5): 8～9.

[4] 刘强. 张瑞敏谈信息化时代海尔制胜的“三个能力”[EB/OL]. http//www. xinhuanet. com, 2004-8-25.