第 29 卷 第 1 期 昆明理工大学学报(理工版) Vol.29 No.1
2004 年 2 月 Journal of Kunming University of Science and Technology (Science and Technology) Feb. 2004

基于区间值 Vague 集的多目标模糊决策方法

秦华妮，刘文奇
(昆明理工大学 理学院，云南 昆明 650093)

摘要：介绍了一种新的模糊集合即区间值 Vague 集，此集合把 Vague 集的肯定与否定隶属度函数值采用区间值表示，使其表达不确定数据的形式更灵活，并研究在此种集合下多目标的模糊决策问题，采用评价函数和记分函数进行决策.

关键词：Vague 集；决策系统；模糊集合
中图分类号：O123　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1007－855X(2004)01－0145－04

Multicriteria Decision－making Based on Interval－value Vague Sets

QIN Hua-ni, LIU Wen-qi
(Faculty of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, China)

Abstract: A new fuzzy set—$I-v$ vague set is introduced. The policymaker can choose the best goal to make a multicriteria decision based on $I-v$ Vague sets with appraisement and scoring function.

Key words: Vague sets; decision system; fuzzy sets

0 引言

Gau 和 Buehrer 在文献[1][2]中提出 Vague 集的概念. 一个 Vague 集 V 中，同时用一个真隶属度函数 $t_v(x)$ 和一个假隶属度函数 $f_v(x)$ 表述其隶属度的界，它们分别表示对象 x 属于 V 的支持证据和反对证据的程度. 目前，Vague 集已在国外成功的运用于决策分析、专家系统、模糊控制及故障诊断等领域，并取得较传统模糊集理论更好的效果.

Zadeh 和 Gorzalczany 分别在文献[3][4]中提出了区间值模糊集合(interval value fuzzy sets)的概念，即 $i-v$ fuzzy sets. 文献[5]结合区间值与 Vague 集对两种模糊集作了进一步的拓广，提出区间值 Vague 集($i-v$ Vague 集)的概念，即用区间值表示真假隶属度的值，从而增强了表达不确定数据的能力，并更具灵活性. 本文在此基础上深入研究了在多目标模糊决策支持系统中依据有关约束条件选择最佳目标的模糊决策方法.

1 $i-v$ Vague 集

传统的 Vague 集 V 表述为 $V=[t_v(x), 1-f_v(x)]$，$t_v(x)+f_v(x)\leqslant 1$，其中 $t_v(x)$ 是从支持 x 的证据所导出的 x 的肯定隶属度下界，$f_v(x)$ 是从反对 x 的证据所导出的 x 的否定隶属度下界，$t_v(x)$、$f_v(x)$ 都是确定的单值. 用投票模型解释：对于一个 Vague 集 $V=[0.7, 0.8]$，可理解为投赞成票的是 7 人，投反对票的是 2 人，弃权的是 1 人.

因为区间值相对于单值具有更大的灵活性，将 $t_v(x)$、$f_v(x)$ 由单值扩展为区间值模糊集合，则可得到 $i-v$ Vague 集，显然，这种集合表达不确定数据和模糊数据的能力更强.

定义 1. 称 Vague 集 $\overset{\leftrightarrow}{G}=\{<x, G_T^{\sim}(x), G_F^{\sim}(x)>\mid x\in U\}$ 为 $i-v$ Vague 集，其中 U 是论域，$i-$

收稿日期：2003－04－29.
第一作者简介：秦华妮(1977～)，女，硕士. 主要研究方向：模糊决策，Vague 集研究. E－mail: qhn77@Tom.com

v 模糊集合 $G_{\overleftrightarrow{T}}(x)$、$G_{\overleftrightarrow{J}}(x)$ 分别表示 $x \in U$ 关于 $\overleftrightarrow{G}$ 的真假隶属度，$G_{\overleftrightarrow{T}}(x) = [a_{G_{\overleftrightarrow{T}}}(x), b_{G_{\overleftrightarrow{T}}}(x)] \subseteq [0,1]$，$G_{\overleftrightarrow{J}}(x) = [a_{G_{\overleftrightarrow{J}}}(x), b_{G_{\overleftrightarrow{J}}}(x)] \subseteq [0,1]$，且有 $b_{G_{\overleftrightarrow{T}}}(x) + b_{G_{\overleftrightarrow{J}}}(x) \leqslant 1$.

定义 2. 设 $\overleftrightarrow{G}$、$\overleftrightarrow{H}$、分别为两个 $i-v$ Vague 集，则有 $i-v$ Vague 集的并集、交集、补集的定义如下：

1.1 $i-v$ Vague 并集

$$\overleftrightarrow{G}\,\tilde{\cup}\,\overleftrightarrow{H} = \{< x, G_{\overleftrightarrow{T}}(x), G_{\overleftrightarrow{J}}(x) >\}\,\tilde{\cup}\,\{< x, H_{\overleftrightarrow{T}}(x), H_{\overleftrightarrow{J}}(x) >\}$$

$$= \{< x, [a_{G_{\overleftrightarrow{T}}}(x), b_{G_{\overleftrightarrow{T}}}(x)], [a_{G_{\overleftrightarrow{J}}}(x), b_{G_{\overleftrightarrow{J}}}(x)] >\}\,\tilde{\cup}\,\{< x, [a_{H_{\overleftrightarrow{T}}}(x), b_{H_{\overleftrightarrow{T}}}(x)], [a_{H_{\overleftrightarrow{J}}}(x), b_{H_{\overleftrightarrow{J}}}(x)] >\}$$

$$= \{< x, [a_{G_{\overleftrightarrow{T}}}(x) \vee a_{H_{\overleftrightarrow{T}}}(x), b_{G_{\overleftrightarrow{T}}}(x) \vee b_{H_{\overleftrightarrow{T}}}(x)], [a_{G_{\overleftrightarrow{J}}}(x) \wedge a_{H_{\overleftrightarrow{J}}}(x), b_{G_{\overleftrightarrow{J}}}(x) \wedge b_{H_{\overleftrightarrow{J}}}(x)] >\};$$

1.2 $i-v$ Vague 交集

$$\overleftrightarrow{G}\,\tilde{\cup}\,\overleftrightarrow{H} = \{< x, G_{\overleftrightarrow{T}}(x), G_{\overleftrightarrow{J}}(x) >\}\,\tilde{\cap}\,\{< x, H_{\overleftrightarrow{T}}(x), H_{\overleftrightarrow{J}}(x) >\}$$

$$= \{< x, [a_{G_{\overleftrightarrow{T}}}(x), b_{G_{\overleftrightarrow{T}}}(x)], [a_{G_{\overleftrightarrow{J}}}(x), b_{G_{\overleftrightarrow{J}}}(x)] >\}\,\tilde{\cap}\,\{< x, [a_{H_{\overleftrightarrow{T}}}(x), b_{H_{\overleftrightarrow{T}}}(x)], [a_{H_{\overleftrightarrow{J}}}(x), b_{H_{\overleftrightarrow{J}}}(x)] >\};$$

$$= \{< x, [a_{G_{\overleftrightarrow{T}}}(x) \wedge a_{H_{\overleftrightarrow{T}}}(x), b_{G_{\overleftrightarrow{T}}}(x) \wedge b_{H_{\overleftrightarrow{T}}}(x)], [a_{G_{\overleftrightarrow{J}}}(x) \vee a_{H_{\overleftrightarrow{J}}}(x), b_{H_{\overleftrightarrow{J}}}(x) \vee b_{H_{\overleftrightarrow{J}}}(x)] >\};$$

1.3 $i-v$ Vague 补集

$$\bar{\overleftrightarrow{G}} = \{< x, G_{\overleftrightarrow{J}}(x), G_{\overleftrightarrow{T}}(x) >\};$$

定义 3. $i-v$ Vague 集 $\overleftrightarrow{G}$ 为 $\overleftrightarrow{H}$ 所包含，即 $\overleftrightarrow{G} \subseteq \overleftrightarrow{H}$，当且仅当 $G_{\overleftrightarrow{T}}(x) \subseteq H_{\overleftrightarrow{T}}(x)$ 且 $H_{\overleftrightarrow{J}}(x) \subseteq G_{\overleftrightarrow{J}}(x)$，当且仅当 $a_{G_{\overleftrightarrow{T}}}(x) \leqslant b_{G_{\overleftrightarrow{T}}}(x) \leqslant a_{H_{\overleftrightarrow{T}}}(x) \leqslant b_{H_{\overleftrightarrow{T}}}(x)$ 且 $a_{H_{\overleftrightarrow{J}}}(x) \leqslant b_{H_{\overleftrightarrow{J}}}(x) \leqslant a_{G_{\overleftrightarrow{J}}}(x) \leqslant b_{G_{\overleftrightarrow{J}}}(x)$.

2 多目标模糊决策系统

在模糊多目标系统中，设有 m 个可选决策目标：$A_1, A_2, \cdots, A_m$；n 个约束条件：$C_1, C_2, \cdots, C_n$；假定任一决策目标 A_i 在约束条件 C_j 下的隶属函数用 $i-v$ Vague 集表示为如下形式：

$A_i = \{< C_1, \overleftrightarrow{G}_{i1} >, < C_2, \overleftrightarrow{G}_{i2} >, \cdots, < C_n, \overleftrightarrow{G}_{in} >\} = \{< C_1, G_{i1\overleftrightarrow{T}}, G_{i1\overleftrightarrow{J}} >, < C_2, G_{i2\overleftrightarrow{T}}, G_{i2\overleftrightarrow{J}} >, \cdots, < C_n, G_{in\overleftrightarrow{T}}, G_{in\overleftrightarrow{J}} >\}$，其中 $G_{ij\overleftrightarrow{T}} = [a_{ij\overleftrightarrow{T}}, b_{ij\overleftrightarrow{T}}]$ 表示决策目标 A_i 在约束条件 C_j 下的满意程度区间，$G_{ij\overleftrightarrow{J}} = [a_{ij\overleftrightarrow{J}}, b_{ij\overleftrightarrow{J}}]$ 表示决策目标 A_i 不满足约束条件 C_j 下的否定程度区间，$b_{ij\overleftrightarrow{T}} + b_{ij\overleftrightarrow{J}} \leqslant 1, 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n$.

假定要从 m 个可选目标集中选出一个同时满足约束条件 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 或者满足约束条件 C_{n+1} 的目标，即要使所选目标符合 $C_1, C_2, \cdots$ 和 C_n 或者 C_{n+1}.

采用类似于文献[5]的评价函数 E 表示 A_i 满足决策者要求的程度，

$$E(A_i) = (\overleftrightarrow{G}_{i1} \tilde{\cap} \overleftrightarrow{G}_{i2} \tilde{\cap} \cdots \tilde{\cap} \overleftrightarrow{G}_{in}) \tilde{\cup} \overleftrightarrow{G}_{i(n+1)}$$

$$= \{< G_{i1\overleftrightarrow{T}}, G_{i1\overleftrightarrow{J}} > \tilde{\cap} < G_{i2\overleftrightarrow{T}}, G_{i2\overleftrightarrow{J}} > \tilde{\cap} \cdots \tilde{\cap}\} < G_{in\overleftrightarrow{T}}, G_{in\overleftrightarrow{J}} > \tilde{\cup} \{< G_{i(n+1)\overleftrightarrow{T}}, G_{i(n+1)\overleftrightarrow{J}} >\}$$

$$= \{< [a_{i1\overleftrightarrow{T}} \wedge a_{i2\overleftrightarrow{T}} \wedge \cdots \wedge a_{in\overleftrightarrow{T}}, b_{i1\overleftrightarrow{T}} \wedge b_{i2\overleftrightarrow{T}} \wedge \cdots b_{in\overleftrightarrow{T}}], [a_{i1\overleftrightarrow{J}} \vee a_{i2\overleftrightarrow{J}} \vee \cdots \vee a_{in\overleftrightarrow{J}}, b_{i1\overleftrightarrow{J}} \vee b_{i2\overleftrightarrow{J}} \vee \cdots \vee b_{in\overleftrightarrow{J}}] >\} \tilde{\cup} \{< [a_{i(n+1)\overleftrightarrow{T}}, b_{i(n+1)\overleftrightarrow{T}}], [a_{i(n+1)\overleftrightarrow{J}}, b_{i(n+1)\overleftrightarrow{J}}]\}$$

$$= \{< [a_{i1\overleftrightarrow{T}} \wedge [a_{i2\overleftrightarrow{T}} \wedge \cdots \wedge a_{in\overleftrightarrow{T}} \vee a_{i(n+1)\overleftrightarrow{T}}, b_{i1\overleftrightarrow{T}} \wedge b_{i2\overleftrightarrow{T}} \wedge \cdots \wedge b_{in\overleftrightarrow{T}} \vee [b_{i(n+1)\overleftrightarrow{T}}], [a_{i1\overleftrightarrow{J}} \vee a_{i2\overleftrightarrow{J}} \vee \cdots \vee a_{in\overleftrightarrow{J}} \wedge a_{i(n+1)\overleftrightarrow{J}}, b_{i1\overleftrightarrow{J}} \vee b_{i2\overleftrightarrow{J}} \vee \cdots \vee b_{in\overleftrightarrow{J}} \wedge [b_{i(n+1)\overleftrightarrow{J}}] >\}$$

把此评价函数记为 $E(A_i) = \{G_{i\overleftrightarrow{T}}, G_{i\overleftrightarrow{J}}\} = \{< [a_{i\overleftrightarrow{T}}, b_{i\overleftrightarrow{T}}], [a_{i\overleftrightarrow{J}}, b_{i\overleftrightarrow{J}}] >\}$，其中

$a_{i\vec{l}} = a_{i1\vec{l}} \wedge a_{i2\vec{l}} \wedge \cdots \wedge a_{in\vec{l}} \vee a_{i(n+1)\vec{l}}$,

$b_{i\vec{l}} = b_{i1\vec{l}} \wedge b_{i2\vec{l}} \wedge \cdots \wedge b_{in\vec{l}} \vee b_{i(n+1)\vec{l}}$,

$a_{i\vec{j}} = a_{i1\vec{j}} \vee a_{i2\vec{j}} \vee \cdots \vee a_{in\vec{j}} \wedge a_{i(n+1)\vec{j}}$,

$b_{i\vec{j}} = b_{i1\vec{j}} \vee b_{i2\vec{j}} \vee \cdots \vee b_{in\vec{j}} \wedge b_{i(n+1)\vec{j}}$,

此时记分函数 S 可采用 $S(E(A_i)) = \frac{a_{i\vec{l}} + b_{i\vec{l}}}{2} - \frac{a_{i\vec{j}} + b_{i\vec{j}}}{2}$

定理 1　若两决策目标 A_1, A_2 的记分函数有关系 $E(A_1) \subseteq E(A_2)$，则 $S(E(A_1)) \leqslant S(E(A_2))$，其中 $E(A_1) = \{<[a_{1\vec{l}}, b_{1\vec{l}}], [a_{1\vec{j}}, b_{1\vec{j}}]>\}$，$E(A_2) = \{<[a_{2\vec{l}}, b_{2\vec{l}}], [a_{2\vec{j}}, b_{2\vec{j}}]>\}$.

证明：$E(A_1) \subseteq E(A_2) \Leftrightarrow a_{1\vec{l}} \leqslant b_{1\vec{l}} \leqslant a_{2\vec{l}} \leqslant b_{2\vec{l}}$ 且 $a_{2\vec{j}} \leqslant b_{2\vec{j}} \leqslant a_{1\vec{j}} \leqslant b_{1\vec{j}}$，则 $S(E(A_2)) - S(E(A_1)) = \frac{1}{2}[(a_{2\vec{l}} + b_{2\vec{l}}) - (a_{2\vec{j}} + b_{2\vec{j}})] - \frac{1}{2}[(a_{1\vec{l}} + b_{1\vec{l}}) - (a_{1\vec{j}} + b_{1\vec{j}})] = \frac{1}{2}[(a_{2\vec{l}} + b_{2\vec{l}}) - (a_{1\vec{l}} + b_{1\vec{l}})] + \frac{1}{2}[(a_{1\vec{j}} + b_{1\vec{j}}) - (a_{2\vec{j}} + b_{2\vec{j}})] \geqslant 0$，即有 $S(E(A_1)) \leqslant S(E(A_2))$.

此定理说明满足程度越大，否定程度越小的决策目标的记分函数值越高，则选取记分值高的决策目标符合决策者的要求，所以可以采用此记分函数对决策目标进行选择.

在实际情况中，多个目标之间并不一定满足 $i - v$ Vague 集的这种严格包含关系，且可能出现记分函数值相等的情况. 因此本文采用两个记分函数进行决策. 首先依据 $S_1(E(A_i)) = \frac{a_{i\vec{l}} + b_{i\vec{l}}}{2} - \frac{a_{i\vec{j}} + b_{i\vec{j}}}{2}$ 进行选择，值越大的目标越符合决策要求，若值相等则依据 $S_2(E(A_i))$ 进行决策. 函数 $S_2(E(A_i))$ 的选取可视具体情况而定，主要有如下情况：

(1) $S_2(E(A_i)) = \frac{a_{i\vec{l}} + b_{i\vec{l}}}{2}$，这是乐观型选择，即在综合考察目标满足和不满足决策要求的因素之后，再倾向于依据满足因素进行决策，值越大，则目标越符合决策要求.

(2) $S_2(E(A_i)) = \frac{a_{i\vec{j}} + b_{i\vec{j}}}{2}$，这是悲观型选择，即在第二步的决策中，依据不满足决策要求的因素进行决策，值越大则目标符合决策要求的程度越差.

3 实例分析

设在一个模糊决策系统中，有 6 个可选目标 $A_1, A_2, \cdots, A_6$；4 个约束条件 C_1, C_2, C_3, C_4；决策者要求选一个最优目标，使其同时符合约束条件 C_1, C_2, C_3 或者符合约束条件 C_4. 任一目标 $A_i(1 \leqslant i \leqslant 6)$ 在约束条件 $C_j(1 \leqslant j \leqslant 4)$ 下的隶属函数用 $i - v$ Vague 集表示如下表：

表 1　目标对约束符合程度的 Vague 集表示

目标 A_i	约束条件 C_j			
	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	< [0.1,0.1], [0.9,0.9] >	< [0.8,0.9], [0,0.1]	< [0,0], [0,0] >	< [0,1], [0,0] >
A_2	< [0.5,0.9], [0,0.1] >	< [0,0], [0,1] >	< [0.7,0.8], [0.1,0.2] >	< [0.1,0.1], [0.7,0.9] >
A_3	< [0,0], [0,0] >	< [0,0.1], [0.7,0.8] >	< [0.5,0.8], [0,0.1] >	< [0.1,0.3], [0.7,0.7] >
A_4	< [0,8,0.9], [0,0.1] >	< [0,0.2], [0.7,0.8] >	< [0.1,0.3], [0.6,0.7] >	< [0.8,0.9], [0,0.1] >
A_5	< [0,8,0.9], [0,0.1] >	< [0.5,0.6], [0.1,0.2] >	< [0.8,0.9], [0,0.1] >	< [0.6,0.7], [0.1,0.2] >
A_6	< [0.4,0.5], [0,0.2] >	< [0.5,0.6], [0.1,0.2] >	< [0.8,0.9], [0,0.1] >	< [0.6,0.7], [0.1,0.2] >

则 $A_1, A_2, \cdots, A_6$ 的评价函数值为

$E(A_1) = <[0.1 \wedge 0.8 \wedge 0 \vee 0, 0.1 \wedge 0.9 \wedge 0 \vee 1], [0.9 \vee 0 \vee 0 \wedge 1, 0.9 \vee 0.1 \vee 0 \wedge 0]>$

$= <[0,1],[0,0]>$

$E(A_2) = <[0,0.1],[0.1,0.9]>$;$E(A_3) = <[0.1,0.3],[0.7,0.7]>$;$E(A_4) = <[0.8,0.9],[0,0.1]>$

$E(A_5) = <[0.6,0.7],[0.1,0.2]>$;$E(A_6) = <[0.4,0.5],[0.1,0.2]>$.

记分函数值为 $S_1(E(A_1)) = \frac{1}{2}[(0+1)-(0+0)] = 0.5$; $S_1(E(A_2)) = -0.45$;

$S_1(E(A_3)) = -0.5$;$S_1(E(A_4)) = 0.8$;$S_1(E(A_5)) = 0.5$;$S_1(E(A_6)) = 0.3$.

此时有 $S_1(E(A_4)) > S_1(E(A_5)) = S_1(E(A_1)) > S_1(E(A_6)) > S_1(E(A_2)) > S_1(E(A_3))$,目标 A_4 的记分函数值最大,所以决策最优目标为 A_4,要对所有决策目标的优劣进行排序时,还需用第二个记分函数考察 A_1, A_5 的优劣度,本例采用 $S_2(E(A_i)) = \frac{a_{i\overleftrightarrow{I}} + b_{i\overleftrightarrow{I}}}{2}$,$S_2(E(A_1)) = 0.5$, $S_2(E(A_5)) = 0.65$,此时所有决策目标中, A_4 最优,其次 A_5 依次是 A_1, A_6, A_2, A_3.

4 结束语

$i-v$ Vague 集综合了区间值模糊集和 Vague 集的优点,运用在模糊决策系统中较传统的模糊集方法具有更强大的表达不确定数据的能力,并更灵活.

参考文献:

[1] Gau W L, Danied J B. Vague Sets[J]. IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics, 1993, 23(2): 610 ~ 614.

[2] 李凡.模糊信息处理系统[M].北京:北京大学出版社,1998.

[3] Zadeh L A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning [J]. Information Sciences, 1975, 8(3): 199 ~ 249.

[4] Gorzalczany M B. A method of inference in approximate reasoning based on interval - valued fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1987, 21(1): 1 ~ 17.

[5] 马志锋,刑汉承,郑晓妹.区间值 Vague 决策系统及其规则提取方法[J].电子学报,2001,29(5):585 ~ 589.

[6] 李凡,饶勇.基于 Vague 集的加权多目标模糊决策方法[J].计算机科学,2001,28(7):60 ~ 62.

[7] 赵晓燕,张振良. T 近似空间上粗糙模糊集的等价定义[J].昆明理工大学学报(理工版),2003(增刊):491 ~ 493.