

# 基于滑模的平行双倒立摆系统稳定控制研究

张 春<sup>1</sup>, 徐开红<sup>2</sup>, 江 明<sup>1</sup>

(1. 安徽工程科技学院 电气工程系, 安徽 芜湖 241000 2. 苏州松特商贸有限公司 深圳分公司, 广东 深圳 518048)

**摘要:** 结合控制目标对两摆间无弹簧连接的平行双倒立摆系统进行合理建模, 验证所建模型可行性, 讨论系统能控性和参数间的关系, 设计了滑模变结构控制律, 仿真结果表明滑模变结构控制能实现平行双倒立摆系统的稳定控制。

**关键词:** 倒立摆; 滑模; 变结构控制; 电机控制

**中图分类号:** TP273 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-855X(2008)03-0078-04

## Stabilization Control of Parallel Type Inverted Pendulum Based on Sliding Mode

ZHANG Chun<sup>1</sup>, XU Kaihong<sup>2</sup>, JIANG Ming<sup>1</sup>

(1. Department of Electrical Engineering, Anhui University of Technology and Science, Wuhu, Anhui 241000, China

2. Panamech System (Suzhou) Shenzhen Branch Co., Ltd. Shenzhen, Guangdong 518048, China)

**Abstract** With regard to the control objective, this paper validates the feasibility and discusses the relations between the controllability and the parameters through the rationality model for the parallel-type inverted pendulum without springs. The law of sliding mode control is also designed. It is proved through the simulation result that the sliding mode control can realize the stabilization control of parallel-type inverted pendulum.

**Key words** inverted pendulum; sliding mode; variable structure control; motor control

### 0 引言

倒立摆广泛应用于军工、航天、机器人领域和一般工业过程中, 尤其作为非线性、强耦合且自然不稳定系统, 可以有效反映诸如可镇定性、鲁棒性及跟踪性能等许多控制中的关键问题, 而且作为典型欠驱动系统控制难度很大, 目前还有很多关键技术仍未很好解决. 因此倒立摆成为控制理论中经久不衰的研究课题. 在各种倒立摆系统的控制研究中, 平行单级双倒立摆的单电机控制稳定研究很少, 目前只有少数学者对两摆间有弹簧连接的平行单级双倒立摆的控制稳定和两个电机的解耦控制问题进行了研究<sup>[1]</sup>. 而两摆间无弹簧连接的平行单级双倒立摆结构相对更加复杂些, 非线性和耦合作用也更强, 目前国内外对这类倒立摆的研究更少. 本文运用牛顿定律对平行单级双倒立摆系统进行了有效建模, 设计了滑模变结构控制律, 仿真结果表明该文的理论与控制规律能达到较满意的控制效果.

## 1 双摆系统数学模型的建立

### 1.1 双摆系统数学模型的建立

为简化分析, 在建模过程中, 忽略空气流动阻力以及各种次要的摩擦力, 将双摆系统抽象成小车和 2 个匀质刚性杆组成的系统<sup>[2]</sup>如图 1. 设小车的质量为  $M$ , 小

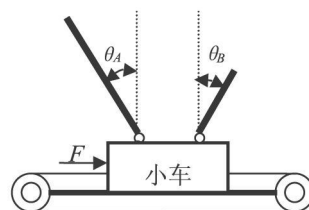


图1 双摆系统

Fig.1 The system of parallel-type inverted pendulum

收稿日期: 2007-10-18 基金项目: 安徽省教育厅自然科学基金资助项目 (项目编号: KJ2007B045).

第一作者简介: 张春 (1972-), 男, 硕士, 讲师. 主要研究方向: 模糊控制及控制系统 CAD

E-mail: chzhang@auts.edu.cn

车在水平方向的位移为  $x$ , 施加在小车上的力为  $F$ , 2 个摆杆的质量、长度分别为  $m_A, m_B, 2L_A, 2L_B$ , 转动惯量  $J_A = \frac{1}{3}m_A L_A^2, J_B = \frac{1}{3}m_B L_B^2$ , 2 个摆杆与竖直向上方向的夹角分别为  $\theta_A, \theta_B$ . 对小车和摆杆分别进行受力分析, 运用牛顿第 2 定律得双摆系统的精确数学模型为:

$$F = (M + m_A + m_B)\ddot{x} + m_A L_A (\ddot{\theta}_A \cos\theta_A - \sin\theta_A \dot{\theta}_A^2 + m_B L_B (\ddot{\theta} \cos\theta_B - \sin\theta_B \dot{\theta}_B^2) \tag{1}$$

$$g \sin\theta_A = \frac{4}{3}\ddot{\theta}_A L_A + \ddot{x} \cos\theta_A \tag{2}$$

$$g \sin\theta_B = \frac{4}{3}\ddot{\theta}_B L_B + \ddot{x} \cos\theta_B \tag{3}$$

式 (1) ~ (3) 即为双摆系统的微分方程形式数学模型.

1.2 双摆系统数学模型的线性化

为便于分析和计算, 在  $|\theta_A|, |\theta_B| < 10^\circ$  时, 对精确模型近似处理:  $\cos\theta_A \approx 1, \cos\theta_B \approx 1, \sin\theta_A \approx \theta_A, \sin\theta_B \approx \theta_B, \left(\frac{d\theta_A}{dt}\right)^2 \approx 0, \left(\frac{d\theta_B}{dt}\right)^2 \approx 0$  将上述条件代入方程 (1) ~ (3) 中, 则进行线性化处理之后的微分方程组为:

$$F = (M + m_A + m_B)\ddot{x} + m_A L_A \ddot{\theta}_A + m_B L_B \ddot{\theta}_B \tag{4}$$

$$g\theta_A = \frac{4}{3}\ddot{\theta}_A L_A + \ddot{x} \tag{5}$$

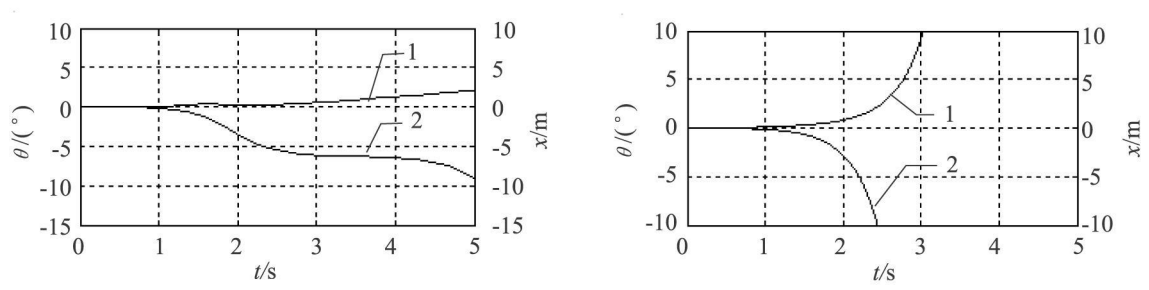
$$g\theta_B = \frac{4}{3}\ddot{\theta}_B L_B + \ddot{x} \tag{6}$$

设状态变量为  $x, \dot{x}, \theta_A, \theta_B, \dot{\theta}_A, \dot{\theta}_B$ , 经过变换易得状态空间表达式为:

$$[\dot{x}, \ddot{x}, \dot{\theta}_A, \dot{\theta}_B, \ddot{\theta}_A, \ddot{\theta}_B]^T = A[x, \dot{x}, \theta_A, \dot{\theta}_A, \theta_B, \dot{\theta}_B]^T + BF \tag{7}$$

其中,  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3g(4M + 4m_A + m_B)}{4L_A p} & 0 & \frac{9m_B g}{4L_A p} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{9m_A g}{4L_B p} & 0 & \frac{3g(4M + m_A + 4m_B)}{4L_B p} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{3m_A g}{p} & 0 & -\frac{3m_B g}{p} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$   $B = [0 \quad -\frac{3}{L_A p} \quad 0 \quad -\frac{3}{L_B p} \quad 0 \quad \frac{4}{p}]^T$

其中  $p = 4M + m_A + m_B$



1—小车位移的阶跃响应曲线; 2—两摆杆摆角的阶跃响应曲线(重合)

图2 精确模型和线性化模型的阶跃响应曲线(摆角初始值为0)

Fig.2 The step response of the precise and linearized model(zero for angle initialization)

## 2 系统能控性分析

### 2.1 线性化模型的验证

在摆角的初始值为  $0^\circ$  (竖直向上) 条件下, 利用精确模型和线性化模型分别求系统的阶跃响应, 其中,  $M = 2 \text{ kg}$ ,  $m_A = 0.2 \text{ kg}$ ,  $m_B = 0.2 \text{ kg}$ ,  $L_A = 0.8 \text{ m}$ ,  $L_B = 0.8 \text{ m}$ ,  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ,  $F = 0.4$  (阶跃信号), 系统阶跃响应曲线如图 2 所示.

从中可知在摆角变化不大时, 精确模型和线性化之后的模型的阶跃响应基本相同, 但角度越大, 后者的误差就越大.

### 2.2 系统能控性研究

在上述所设系统参数情况下, 通过编程求解系统的能控矩阵的秩  $f = 4 < 6$  系统的极点  $p$  为  $0, 0, 3.2404, 3.0311, -3.2404, -3.0311$ , 其中有 2 个不稳定的极点. 因此系统不稳定, 且状态不完全能控. 为便于对比研究, 改变摆杆长度  $L_A = 0.8 \text{ m}$ ,  $L_B = 1 \text{ m}$ , 其它参数不变, 求得系统的能控矩阵的秩  $f = 6$  能观矩阵的秩  $s = 6$  因此系统状态完全能控, 并能实现对系统全状态反馈控制.

改变  $L_A$  和  $L_B$  的值, 通过大量仿真实验, 发现只要  $L_A \neq L_B$ , 系统的能控矩阵的秩  $f = 6$  系统状态完全能控; 而  $L_A = L_B$  时,  $f = 4 < 6$  系统状态不完全能控.

## 3 滑模变结构控制

滑模变结构控制理论是变结构控制理论的主要理论体系, 是解决非线性系统控制问题很好的方法. 近年来滑模变结构控制理论研究备受关注<sup>[3]</sup>.

### 3.1 控制律的设计

考虑如下系统:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad s = C'x \quad (8)$$

其中,  $x \in R^n$ ,  $u \in R^1$ ,  $s \in R^1$ ,  $C' = [C_1 \quad C_2 \quad \dots \quad C_n]$

设计滑模变结构控制器的首要任务就是选择切换函数  $s$  即确定  $C'$  并确定控制  $u$ , 使得闭环系统中滑模面上存在滑动模式, 且所有相轨迹在有限时间内到达  $s$  上的滑动模式区域并保证滑动模式渐近稳定且具有良好的动态品质.

由于平行单级双倒立摆的自然不稳定性, 我们希望系统具有趋近运动的动态品质, 故采用指数趋近律设计, 这种趋近律不仅可使系统状态较快达到滑模面, 而且在适当选取  $k$  和  $\varepsilon$  时能大大削弱系统抖振. 取  $s = -\varepsilon \cdot \text{sgn}(s) - k \cdot s$  ( $\varepsilon > 0, k > 0$ ),

则

$$\begin{aligned} s &= C'x = C'Ax + C'Bu = -\varepsilon \cdot \text{sgn}(s) - k \cdot s \\ u &= -(C'B)^{-1} (C'Ax + \varepsilon \cdot \text{sgn}(s) + k \cdot s) \end{aligned} \quad (9)$$

采用 (9) 式作为控制律, 显然满足广义滑模条件  $s \cdot \dot{s} < 0$  不仅保证了滑动模式的可达性也保证了滑动模式的存在性.

而  $C'$  阵的选取可以保证最终滑动模式的稳定性和品质. 为计算方便, 将式 (8) 化为可控标准型, 设转换矩阵为  $P$ , 即  $\bar{x} = Px$ , 有:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \\ s &= C'\bar{x} = \bar{C}'\bar{x} \end{aligned} \quad (10)$$

其中,  $\bar{A} = PAP^{-1}$ ,  $\bar{B} = PB$ ,  $\bar{C}' = C'P^{-1} = [C_1 \quad C_2 \quad \dots \quad C_n]$

当系统状态在滑模面上运动时由  $s = 0$  可求得所需的等效控制量  $u_{eq}$ .

因为

$$s = \bar{C}'\bar{x} = \bar{C}'\bar{A}\bar{x} + \bar{C}'\bar{B}u = 0 \quad (11)$$

则

$$u_{eq} = -(\bar{C}'\bar{B})^{-1}\bar{C}'\bar{A}x$$

将式 (11) 代入式 (10), 有

$$\bar{x} = (\bar{1}B(\bar{C}'\bar{B})^{-1}\bar{C}')\bar{A}x = \bar{A}'\bar{x} \tag{12}$$

其中,  $\bar{A}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \ddots & 1 \\ 0 & -\frac{\bar{C}_1}{\bar{C}_n} & -\frac{\bar{C}_2}{\bar{C}_n} & \dots & -\frac{\bar{C}_{n-1}}{\bar{C}_n} \end{bmatrix}$

因此只要多项式  $x_n + \frac{\bar{C}_{n-1}}{\bar{C}_n}s^{n-1} + \dots + \frac{\bar{C}_1}{\bar{C}_n}s$  是赫尔维茨稳定的, 则可控标准型系统 (12) 也是稳定的, 由

$C' = \bar{C}'P$  求得  $C'$ , 并进而由  $u_{eq} = -(\bar{C}'\bar{B})^{-1}\bar{C}'\bar{A}x$  求得原系统 (8) 的等效控制也使系统稳定。

### 3.2 仿真实验

因可控标准型不改变原系统的极点, 故只需对系统 (10) 进行极点配置即可. 而当系统状态进入滑模面运动时因增加了的约束, 故只能配置  $n - 1$  个极点. 为使系统状态以较大的速度趋向原点, 可将期望闭环极点设为绝对值较大的负数, 并不失一般性取  $\bar{C}_n = 1$ , 根据经验选取  $\epsilon = 0.1$ ,  $k = 10$  则实际控制律为:

$$u = K_{sn}x - 0.1 \cdot \text{sgn}(C'x) \tag{13}$$

其中,  $K_{sn} = -(\bar{C}'\bar{B})^{-1}(\bar{C}'\bar{A} + kC')$

采用式 (13) 作为控制律并用

四阶龙格-库塔法编程对原系统进行仿真, 取系统状态初值为  $x_0 = [0.01 \ 0 \ 0.1 \ 0 \ 0.1 \ 0]^T$ , 仿真曲线如图 3 所示.

从仿真结果可看出采用滑模变结构控制能使小车位移和 2 个摆杆的角度很快地收敛至原点, 实现了对小车和两摆杆角度的快速跟踪功能.

### 4 结论

从平行单级双倒立摆系统特定的物理结构出发, 结合控制目标进行了合理建模, 讨论了所建模型的可信程度并指出其适用范围, 设计的具有指数趋近律的滑模变结构控制规律, 能使系统较快地收敛到期望的稳定位置, 该文的理论和方法在控制理论和工程领域具有重要的研究意义.

### 参考文献:

- [1] 李诚, 张明廉, 张志新. 拟人控制平行单级双倒立摆 [J]. 航空学报, 2006 27(1): 115-119
- [2] 张晓华. 控制系统数字仿真与 CAD [M]. 2 版. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2005.
- [3] 刘金琨. 滑模变结构控制 MATLAB 仿真 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2005.

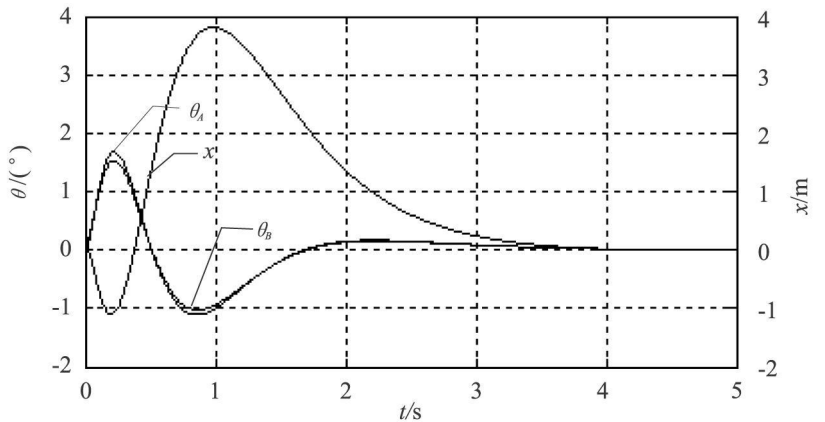


图3 平行单级双倒立摆滑模变结构控制仿真结果  
Fig.3 Simulation results of parallel-type inverted pendulum based on the sliding mode control