多周期易腐库存模型及一种启发式算法

王清蓉[1,2], 杜 文[1], 梁志杰[1]
(1. 西南交通大学 运输学院, 四川 成都 610031; 2. 昆明理工大学 交通工程学院, 云南 昆明 650224)

摘要: 易腐物品的特点导致了求解其最优库存策略的复杂和困难. 以易腐物品的订货量以及即将到期物品的销售价格为决策变量对长时期多阶段补充的库存系统建立了随机动态规划模型, 并利用一启发式方法将长时期多阶段、不易求解的随机动态规划模型转化为易于求解的短时期单阶段的库存优化决策问题, 求解了系统长期运行期望利润最大的库存策略. 最后通过一算例对该启发式方法的有效性进行了分析.

关键词: 易腐物品; 启发式算法; 库存模型
中图分类号: F253.4 文献标识码: A 文章编号: 1007-855X(2005)05-0106-05

Inventory Model and Heuristic Procedure for Perishable Commodities Based on Multi-Period Planning

WANG Qing-rong[1,2], DU WEN[1], LIANG Zhi-jie[1]
(1. Faculty of Traffics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China;
2. Faculty of Transportation Engineering, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650224, China)

Abstract: The property of perishable commodities leads to the difficulties in solving its optimal inventory strategy. The stochastic dynamic planning model is established for long-time multi-period inventory system according to the order quantity of perishable commodities and selling price of mature commodities. A heuristic procedure is adopted to change the stochastic dynamic planning model into an optimal inventory strategy with short-time single period. Therefore the inventory strategy which can realize the maximal expected profits for long-time running of the system is solved. At last an algorithm is used to analyze its validity.

Key words: perishable commodities; heuristic algorithm; inventory modle

0 引 言

大型零售企业或超市经常会遇到易腐物品的订购补充和销售问题. 这类物品具有保质期短、在保质期末没有售出的物品只能报废或丢掉的特点. 当产生报废时就给商家带来了经济损失. 因此, 这类物品的最优库存控制策略, 正引起越来越多人的重视, 出现了许多随机最优控制模型[1~3]. 但文献中模型的求解过程都非常复杂. 此外, 这些文献几乎都未分析易腐物品的订货量以及即将到期物品的折扣价对计划期内总期望利润的影响. 以新鲜物品的订货量和即将到期物品的折扣价(即销售价)为决策变量, 建立了使计划期内总期望利润最大的随机动态规划库存模型, 并利用一启发式方法简化了求解过程, 最后通过算例分析了该启发式方法的有效性.

为便于分析和处理问题, 根据实际观察将模型中的易腐物品大致分为两种类型, 在每一周期开始时刚购进的直到打折前的物品统称为新鲜物品. 从打折降价销售直到物品退出货架的物品统称为非新鲜物品. 假设一个周期内总的销售量是随机变量, 其分布函数不受非新鲜物品折扣程度的影响, 且在非新鲜物品打折降价后, 非新鲜物品的销售量随折扣程度的增大而线性增加, 其比例为定常数 K $(0<K<1)$; 易腐物品

收稿日期: 2004-10-14.
第一作者简介: 王清蓉(1972~), 女, 在读博士研究生. 主要研究方向: 物流与供应链管理. **E-mail**: lis56528@126.com

的寿命为 2个“周期”. 此处的周期主要根据易腐物品的物理寿命和库存检查周期而定, 且经营的计划期应为周期的整数倍.

1 模型描述

库存系统采用周期性检查并补充 (不妨设从时间 0到 T 为一个周期, 亦称一个经营周期). 系统运行 $n(n>1)$ 个周期. 设 $B_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 为周期初始时非新鲜物品的库存量. 在一个经营周期末未售出且到期的商品作报废处理. 每个周期期初的订货量 Q_i 与非新鲜物品的折扣价格 S_i 为决策变量. 单位新鲜物品的销售价格 R 与购买成本 C 在计划期内固定不变.

随机变量 X_i (分布函数为 $F(X_i)$) 为第 i 周期内的总销售量, 其中新鲜物品的需求量为 X_{i1}, 非新鲜物品的需求量为 X_{i2}, 显然有:

$$X_{i1}=X_i-X_{i2}\quad i=1,2,\cdots,n \tag{1}$$

$$X_{i2}=P_iX_i\quad i=1,2,\cdots,n \tag{2}$$

式 (2) 中, $P_i=K(1-S_i/R)$, 为非新鲜物品的需求系数, 比例系数 $K\in(0,1)$ 为定常数.

2 模型的建立

设 $W_i(B_i)$ 表示从周期 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 到整个计划时段末在状态变量 B_i, 决策变量为 (Q_i,S_i) 的情况下总利润的最大值. $r_i(Q_i,S_i)$ 为阶段收益, $T_i(B_i,Q_i,S_i)$ 为状态转移函数. 不考虑贴现, 则根据动态规划原理有

$$W_i(B_i)=\max_{Q_i S_i}(r_i(Q_i,S_i)+W_{i+1}(T_i(B_i,Q_i,S_i))) \tag{3}$$

$$W_{n+1}(B_{n+1}) \tag{4}$$

阶段收益 $r_i(Q_i,S_i)$ 根据具体情况有如下 4种情况:

当 $X_{i1}\le Q_i, X_{i2}\le B_i$ 时, 有　$r_i(Q_i,S_i)=RX_{i1}+S_iX_{i2}-CQ_i$　(5)

当 $X_i\le Q_i+B_i, X_{i2}>B_i$ 时, 有　$r_i(Q_i,S_i)=R(X_i-B_i)+S_iB_i-CQ_i$　(6)

当 $X_{i1}>Q_i, X_{i2}\le B_i$ 时, 有　$r_i(Q_i,S_i)=RQ_i+S_iX_{i2}-CQ_i$　(7)

当 $X_i>Q_i+B_i, X_{i2}>B_i$ 时, 有　$r_i(Q_i,S_i)=RQ_i+S_iB_i-CQ_i$　(8)

为书写方便, 省去表示周期数的下标, 结合式 (1), (2), 则单周期的期望利润 $E(r(Q,S))$ 可由式 (5) ~ (8) 式综合表示为:

$$\begin{aligned}E(r(Q,S))=&-CQ+\int_0^{Z_{\min}}(R(1-P)+SP)X\,\mathrm{d}F(X)+\int_{Q/(1-P)}^{B/P}(RQ+SPX)\,\mathrm{d}F(X)\\&+\int_{Z_{\max}}^{\infty}(RQ+SB)\,\mathrm{d}F(X)+\int_{B/P}^{B+Q}(R(X-B)+SB)\,\mathrm{d}F(X)\end{aligned} \tag{9}$$

其中 $Z_{\min}=\min[Q/(1-P),B/P]$, $Z_{\max}=\max[B/P,B+Q]$

$T(B,Q,S)$ 的均值 $E(T(B,Q,S))$ 为

$$E(T(Q,S,B))=\int_{B/P}^{B+Q}(Q+B-X)\,\mathrm{d}F(X)+\int_0^{Z_{\min}}[Q-(1-P)X]\,\mathrm{d}F(X) \tag{10}$$

3 算法设计

3.1 问题转化

从式 (9) 知, $E(r(Q,S))$ 不是 B 的单调函数. 求解此类随机动态规划问题的最优策略将是非常复杂甚至困难的, 在实际操作中管理者也不愿采用复杂的策略. 因此, 通过一种启发式方法, 将 n 周期的多阶段决策问题简化为 n 个单周期问题. 一般说来, 使单周期期望利润最大的 (Q,S) 策略并不是多周期问题的最优策略, 因此论文只求其近似最优解.

启发式方法具体为:假设每周期处理该周期前一周期剩余下来的非新鲜物品库存的单位成本为 H ($H < C$),同时,在该周期初购进的新鲜物品在该周期以价格 R 销售后,在该周期期末未售出的物品的残值亦为 H. H 是非新鲜物品库存量的函数,且可以随着周期不同而变化.这样处理后,在假定 V 的情况下,多周期库存问题便转化为求解单周期的订货量以及折扣价格问题.根据需求系数 P 与 $B/(B+Q)$ 值的大小关系,单周期决策问题式(9)又可分解为两个子问题.

子问题 1

$$\begin{cases} \max(E(r_1(Q,P))) = -CQ - HB + \int_{B+Q}^{\infty}(RQ + SB)\,dF(X) + \int_0^{B/P}[(R(1-P) + SP)X \\ \quad + H(Q - (1-P)X)]\,dF(X) + \int_{B/P}^{B+P}[(R(-B) + SB + H(Q + B - X)]\,dF(X) \\ Q + B - B/P \ge 0 \quad Q \ge 0 \quad K - P \ge 0 \end{cases} \tag{11}$$

子问题 2

$$\begin{cases} \max(E(r_2(Q,P))) = -CQ - HB + \int_{Q/1-P}^{B/P}(RQ + SPX)\,dF(X) + \int_0^{Q/1-P}[(R(1-P)X + SPX \\ \quad + H(Q - (1-P)X)]\,dF(X) + \int_{B/P}^{\infty}(RQ + SB)\,dF(X) \\ B/P - (B+Q) \ge 0 \quad Q \ge 0 \quad K - P \ge 0 \end{cases} \tag{12}$$

3 2 求解子问题

3 2 1 两子问题分别对应的库恩—塔克条件

通过分析知,非线性子问题 1~2均不是凸规划,则库恩—塔克条件[4](简称 K—T条件)为子问题 1~2局部最优点的必要条件.其对应的 K—T条件为

子问题 1

$$\begin{cases} (1 - C/R) - (1 - H/R)F(B + Q^*) + \mu_1 + \mu_2 = 0 \\ (H/R - 2P/K)\int_0^{B/P} X\,dF(X) - (B/K)[1 - F(B/P)] + \mu_1 B/P^2 - \mu_3 = 0 \\ \mu_1(Q^* + B - B/P^*) = 0 \quad \mu_2 Q^* = 0 \quad \mu_3(K - P^*) = 0 \quad \mu_i \ge 0 \quad i = 1, 2, 3 \end{cases} \tag{13}$$

子问题 2

$$\begin{cases} (1 - C/R) - (1 - V/R)F(Q^*/(1 - P^*)) - \mu_1 + \mu_2 = 0 \\ (1 - 2P^*/K)\int_0^{B/P} X\,dF(X) - \mu_1 B/(P^*)^2 - \mu_3 - B/K - (1 - V/R)\int_0^{Q^*/(1-P^*)} X\,dF(X) + \\ \quad (B/K)F(B/P^*) = 0 \\ \mu_1(B/P^* - (B + Q^*)) = 0 \quad \mu_2 Q^* = 0 \quad \mu_3(K - P^*) = 0 \quad \mu_i \ge 0 \quad i = 1, 2, 3 \end{cases} \tag{14}$$

式(13),(14)中 μ_1, μ_2, μ_3 分别为对应子问题中约束条件相应的拉格朗日乘子. (Q^*, P^*) 为子问题对应的局部最优点.

分析子问题 1,2的 K—T 条件, Q^*, P^* 显然有 $$Q^* > 0 \quad P^* < K \tag{15}$$

先求解子问题 1,即在满足式(15)的情况下,解方程组(13).因 $Q^* > 0$,则由(13)中的约束条件 $\mu_2 Q^* = 0$ 推出 $\mu_2 = 0$,同理,因 $P^* < K$,则由约束条件 $\mu_3(K - P^*) = 0$ 得 $\mu_3 = 0$ 故求解子问题 1只需考虑以下两种情况:

1) $\mu_1 > 0$, $\mu_2 = \mu_3 = 0$,对应的 K—T点 A_1

$$\begin{cases} Q^* = B(1-P^*)/P^* \\ P^*: (H/R - 2P/K)\int_0^{B/P} X\,dF(X) - (B/K)[1-F(B/P)] + (B/P^2)[(1-H/R)F(B/P) - (1-C/R)] = 0 \\ P^* < \min\{K, B/F^{-1}[(1-C/R)/(1-H/R)]\} \end{cases}$$

2) $\mu_1 = 0, \mu_2 = \mu_3 = 0$, 对应的 K—T点 A_2

$$\begin{cases} Q^* = F^{-1}[(1-C/R)/(1-H/R)] - B \\ P^*: (H/R - 2P/K)\int_0^{B/P} X\,dF(X) - (B/K)[1-F(B/P)] = 0 \\ B/(B+Q) \le P^* \le K \end{cases}$$

同理, 由 (14) 与 (15) 可得子问题 2对应的 K—T点. 当 $\mu_1 > 0$, 所得K—T点与A_1同. 当 $\mu_1 = 0$, 对应的K—T点 A_3

$$\begin{cases} Q^* = (1-P^*)F^{-1}\{(1-C/R)/(1-H/R)\} \\ P^*: (1-2P/K)\int_0^{B/P} X\,dF(X) - (1-H/R)\int_0^{Y} X\,dF(X) - (B/K)[1-F(B/P)] = 0 \\ Y = F^{-1}[(1-C/R)/(1-H/R)] \\ 0 < P^* < \min[K, B/(B+Q)] \end{cases}$$

可见, 单周期易腐物品期望利润最大的决策问题一共可能有 3个 K—T点(即 3个可能局部最优点). 上面的K—T点公式中, $F^{-1}\{.\}$表示函数 $F\{.\}$的反函数.

3.2.2 K—T点为局部最优点的充分条件

K—T点最终是否为所求的局部最优值点, 还需判断目标函数在相应 K—T点处的海赛(Hesse)阵是否为负定. 对子问题 2的目标函数 $C_2(Q^*, P^*)$判断, 其海赛阵负定. 而对子问题 1的目标函数 $C_1(Q^*, P^*)$求二阶偏微分得: 只在条件 $0 \le P^* \le KH/R$ 下, 其海赛阵负定.

综上所述, 在求解单周期易腐物品库存系统的局部最优点时, 除 A_3 点外, 对 A_1, A_2 点需同时考虑约束条件: $0 \le P^* \le KH/R$. 从这些局部最优点中选出目标函数最大者即为所求的最优策略.

4 实例分析

考虑一馅饼供应商的库存问题, 设馅饼保质期为 2天. 每天的需求量服从参数为 λ的负指数分布; 其概率密度 $f(X)$为

$$f(X) = \begin{cases} (1/\lambda)e^{-X/\lambda} & X \ge 0 \\ 0 & X < 0 \end{cases}$$

λ为每天的平均需求量(设 λ= 80盒). 单位(盒)新鲜馅饼购买成本 $C = 12$元, 销售价格 $R = 20$元. 满两天还未售出的馅饼报废丢弃. 该供应商每天检查库存, 面临着订货量与寿命还剩 1天的馅饼的折扣价的决策问题, 以使自己盈利最大.

设保质期还有 1天的非新鲜馅饼折余值$H = 0.25R$, 库存量 $B = 30$盒, 最大比例系数 $K = 0.9$

根据文中算法, 其对应的局部最优点为

A_1: 无解; A_2: 无解; A_3: $Q^* = 46.45$　$P^* = 0.24$　$S^* = 14.7$　$r_2(Q^*, P^*) = 234.6$

可见, 馅饼供应商的近似最优策略: 订货量 $Q^* = 46$, 折扣价 $S^* = 14.7$, 获得利润 234.6元.

5 分析 *K*, *H* 对折扣价 *S* 以及利润的影响

现分析需求系数K以及残值H 对折扣价 S与利润的影响. 其结果分别如图 1, 2所示: 其中, ◆表示对折扣价 S的影响; ▲ 代表对利润 r的影响.

在图 1中, 随着 K 的增加, S 增大(即折扣程度减小), Q^* 减小, $r(Q^*, P^*)$ 也增大. 笔者以为: 在 B 一定的情况下, K 越大, 则供应商可提高非新鲜物品的折扣价 S, 以控制购买非新鲜物品的顾客人数, 使一个周期内新鲜物品的需求量变化不大, 所以 Q^* 虽随 K 减小, 但幅度并不大, 结果是利润增加. 可见, 在理论上, 由于是假设的线性关系, K 越大, 则利润随之增大, 商家自然乐意选择较大的 K 值, 但在实际经营环境中, 由于不同顾客对商品效用多重性认知的不同, K 值上界的确定不是论文探讨的内容.

在图 2中, $r(Q^*, P^*)$ 开始随 H 的增大, 先减小, 到 $H \in [0.3R, 0.35R]$ 时, $r(Q^*, P^*)$ 基本保持不变, 此后再随着 H 的增大而增大. 笔者以为: H 既代表了前一周期剩余物品的处理成本, 又反映了本周期剩余物品的残值. 在其它参数一定的情况下, 开始, H 值小, 订货量也较小, 随着 H 增加, 前一周期剩余物品的处理成本增加, 故利润减小, 到 $H \in [0.3R, 0.35R]$ 时, 利润达到稳态. 此后, 随着 H 的继续增大, 供应商会加大订货量, 从而本周期剩余物品的残值远远大于前一周期的处理成本, 故利润呈明显增大的趋势. 可见, 对长时期多阶段决策问题, 折余值 H 应取 $[0.3R, 0.35R]$ 间的值.

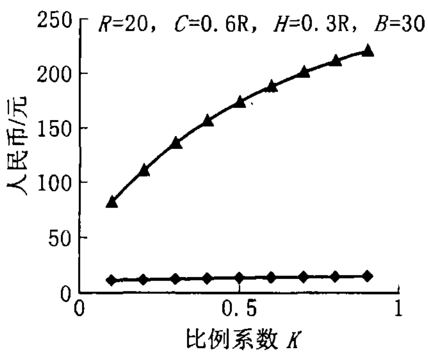

图1 比例系数K对折扣价S及利润的影响
Fig.1 Effects of coneefficient ratio K ondiscount price S and profit

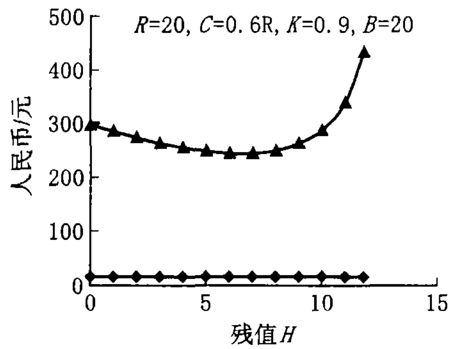

图2 残值H对折扣价S及利润的影响
Fig.2 Effects of salvage value H on discount price S and proft

6 结论

在非新鲜物品取代新鲜物品被售出的数量与非新鲜物品的折扣价呈线性关系的假设基础上, 建立了易腐物品库存系统多阶段决策问题的随机动态规划模型, 并引入残值 H 将多阶段决策转化为单阶段决策问题求解; 最后通过一算例分析了线性比例 K 与残值 H 对最优决策和期望利润的影响, 得出了相应的结论.

参考文献:

[1] 马玉林. 可滞后的易腐库存模型[J]. 工科数学. 2001, 17(5): 59~66
[2] 姜大立, 杜文. 二阶段易腐物品生产研究[J]. 西南交通大学学报. 1998, 33(4): 430~435
[3] Cohen M A. Joint Pricing and Ordering Policy for Exponentially Inventory with Known Demand[J]. Nav. Res. Logis. 1991, 24(2): 257~268
[4] 郭耀煌. 运筹学原理与方法[M]. 成都: 西南交通大学出版社, 1997. 282~287
[5] Nahmias S. Perishable Inventory Theory[J]. Operation Research, 1982, 30(4): 680~708