第28卷 第1期 昆明理工大学学报(理工版) Vol.28 No.1
2003年2月 Journal of Kunming University of Science and Technology (Science and Technology) Feb. 2003

多目标规划 αr - 有效解和 αr - 最优解的充要条件与求解方法

顾利勤,黄丽云,钟朝艳,崔萍
(曲靖师范学院 数学系,云南 曲靖 655000)

摘要:对于有限维 Euclid 空间中的 αr - 序类,文[4]讨论了其若干性质,在此基础上文[3]引进了多目标规划 αr - 有效解和 αr - 最优解的概念,本文讨论了这些解的一些性质,得到几个充要条件并讨论了求解的方法.

关键词: αr - 锥; 严格 αr - 锥; αr - 有效解; αr - 最优解
中图分类号:O221.6 **文献标识码**:A **文章编号**:1007 - 855X(2003)01 - 0168 - 05

Some Necessary and Sufficient Conditions and the Method of Extracting the Solution of the αr - efficient Solution and αr - optimal Solution to Multiobjective Programming Problem

GU Li-qin, HUANG Li-yun, ZHONG Cao-yan, Cui Ping
(Qujing Teacher's College, Qujing, Yunnan 655000, China)

Abstract: On the class of αr - order in limited - dimensional Euclid spaces, some haracters have been analyzed in paper[4]. Furthermore the idea of the αr - efficient solution and αr - optimal solution for multiobjective programming problem are provided in paper[3]. In this paper, some characters, and some necessary and sufficient conditions are analyzed and some methods of extracting a solution are listed.

Key words: αr - cone; strict αr - cone; αr - efficient solution; αr - optimal solution

0 引言

文[1]引进了有限维空间的较多序类概念,在此基础上文[2]建立了多目标规划的较多有效性理论.文[4]引进了带两个参数的锥类 αr - 锥,讨论了 αr - 锥的某些特点,得到了该类锥的若干性质,文[3]又借助 αr - 序类定义了多目标规划问题的 αr - 有效解和 αr - 最优解,并给出这些解的若干性质.本文进一步得到 αr - 有效解和 αr - 最优解的充要条件及求解方法.

设 $V \in R^m$,记 $|V|_+$、$|V|_-$ 和 $|V|_0$ 分别是向量 V 中正分量个数、负分量个数和0分量个数,又设 $K = \{1,2,3,\cdots,m\}$,

$$A = \{\frac{h}{m-h} \mid h = 1,2,\cdots,m-1\} \cup \{1\}$$

设 $\alpha \in A, r \in K$,称集合

$$H_\alpha(r) = \{V \in R^m \mid \alpha(|V|_+ + |V|_0) \geqslant r\} \tag{1}$$

是 R^m 中的 αr - 锥,集合

$$\mathring{H}_\alpha(r) = \{V \in R^m \mid \alpha |V|_+ \geqslant r\} \tag{2}$$

是 R^m 中的严格 αr - 锥[4].由文[3]有 $\alpha \geqslant 1$ 时,

$$(H_\alpha(r))^c \subset -\mathring{H}_\alpha(m-r+1) \tag{3}$$

对于多目标规划问题

收稿日期:2002 - 09 - 03.
第一作者简介:顾利勤(1964.10 ~),女,副教授;主要研究方向:多目标规划.

$$V - \min_{x \in X} f(x) \tag{VMP}$$

其中 $X \subset R^n$ 是约束集,$f: X \to R^m$ 是向量目标函数.

定义 1.1[3]　设 $X \subset R^n$ 是非空集合,$f: X \to R^m$,$\alpha \in A$,$r \in K$

(1) 若 $\tilde{x} \in X$,并且不存在 $x \in X$ 使得 $f(x) \underset{\alpha r}{\tilde{\lesssim}} f\tilde{x}$,则称 $\tilde{x}$ 是多目标规划问题(VMP)的 αr - 有效解,(VMP)的所有 αr - 有效解组成的集合记作 $M_\alpha^r(f,X)$.

(2) 若 $x^* \in X$,并且 $f(x^*) \underset{\alpha r}{\lesssim} f(x)$,$\forall x \in X$,则称 x^* 是多目标规划问题(VMP)的 αr - 最优解,(VMP)的所有 αr - 最优解组成的集合记作 $H_\alpha^r(f,X)$.

定义 1.2[3]　设 $a, b \in R^m$,$\alpha \in A$,$r \in K$,

(1) $a \underset{\alpha r}{\lesssim} b \Leftrightarrow b - a \in H_\alpha(r)$;

(2) $a \underset{\alpha r}{\tilde{\lesssim}} b \Leftrightarrow b - a \in H_\alpha(r) \setminus \{0\}$.

1 充要条件

下面给出多目标规划问题(VMP)的 αr - 有效解和 αr - 最优解的充要条件.

定义 2.1　设 $S \subset R^n$ 是非空集合,$\varphi: S \to R^m$,$\alpha \in A$,$r \in K$

(1) 若存在 $\bar{x} \in S$,使得 $\varphi(S) \subset H_\alpha(r) + \varphi(\bar{x})$,则称 φ 是 S 上的 $H_\alpha(r)$ - 有界向量函数,或 φ 在 S 上是 $H_\alpha(r)$ - 有界的.

(2) 若存在 $\bar{x} \in S$,使得 $\varphi(S) \subset \mathring{H}_\alpha(r) \cup \{0\} + \varphi(\bar{x})$,则称 φ 是 S 上的严格 $H_\alpha(r)$ - 有界向量函数,或 φ 在 S 上是严格 $H_\alpha(r)$ - 有界的.

定理 2.1　设 $X \subset R^n$ 是非空集合,$f: X \to R^m$,$\alpha \in A$,$r \in K$

(1) 当 $\alpha \geqslant 1$ 时,$M_\alpha^r(f,X) \neq \phi$ 当且仅当 f 是 X 上的严格 $H_\alpha(m - r + 1)$ - 有界向量函数.

(2) $H_\alpha^r(f,X) \neq \phi$ 当且仅当 f 是 X 上的 $H_\alpha(r)$ - 有界向量函数.

证明: (1) 当 $\alpha \geqslant 1$ 时,由定义 1.1 和定义 1.2 知,$M_\alpha^r(f,X) \neq \phi$ 意味着存在 $\tilde{x} \in X$,且不存在 $x \in X$,使

$$f(\tilde{x}) - f(x) \in H_\alpha(r) \setminus \{0\}$$

这等价于,存在 $\tilde{x} \in X$ 使

$$f(\tilde{x}) - f(x) \in H_\alpha^c(r) \cup \{0\}, \forall x \in X$$

由(3),上式即

$$f(x) - f(\tilde{x}) \in \mathring{H}_\alpha(m - r + 1) \cup \{0\}, \forall x \in X$$

也即　$$f(x) \subset \mathring{H}_\alpha(m - r + 1) \cup \{0\} + f(\tilde{x})$$

故按定义 2.1 知 f 是 X 上的严格 $H_\alpha(m - r + 1)$ - 有界向量函数.

(2) 据定义 1.1 和定义 1.2,$H_\alpha^r(f,X) \neq \phi$,意即存在 $x^* \in X$,并且

$$f(x) - f(x^*) \in H_\alpha(r), \forall x \in X$$

即存在 $x^* \in X$ 使

$$f(X) \subset H_\alpha(r) + f(x^*)$$

因而由定义 2.1,f 是 X 上的 $H_\alpha(r)$ - 有界向量函数.

记　$$X(z) = X \setminus \{x \in X \mid f(x) = f(z), z \in X\} \tag{4}$$

$$Q(x) = \begin{cases} \alpha & (x \geqslant 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \quad (\alpha \in A)$$

定理 2.2　设 $X \subset R^n$ 是非空集合,$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x))^T$ 在 X 上有定义,$\alpha \in A$,$r \in K$.

(1) 当 $\alpha \geqslant 1$ 时,$M_\alpha^r(f,X) \neq \phi$ 当且仅当

$$\min_{z \in X} \max_{x \in X(z)} \sum_{i=1}^m Q[f_i(z) - f_i(x)] < r$$

(2) $H_\alpha^r(f,X) \neq \phi$ 当且仅当

$$\max_{z\in X}\min_{x\in X}\sum_{i=1}^{m}Q[f_i(x)-f_i(z)] \geqslant r$$

证明 (1) 从 $M_\alpha^r(f,X)\neq\phi$,由定理2.1可知当时 $\alpha\geqslant 1$,f 在 X 上是严格 $H_\alpha(m-r+1)$ - 有界的.因此,按定义2.1(2),存在 $z\in X$ 使

$$f(x)-f(z)\in \mathring{H}_\alpha(m-r+1)\cup\{0\},\forall x\in X$$

因 $\alpha\geqslant 1$,由(3)有

$$f(z)-f(x)\in H_\alpha^c(r)\cup\{0\},\forall x\in X$$

或即 $$f(z)-f(x)\notin H_\alpha(r)\setminus\{0\},\forall x\in X$$

于是,可推知除 $f(x)=f(z)$ 外有

$$\sum_{i=1}^{m}Q[f_i(z)-f_i(x)] < r,\forall x\in X$$

因而 $$\max_{x\in X(z)}\sum_{i=1}^{m}Q[f_i(z)-f_i(x)] < r$$

由于 $z\in X$,从上式便得

$$\min_{z\in X}\max_{x\in X(z)}\sum_{i=1}^{m}Q[f_i(z)-f_i(x)] < r$$

上述过程是可逆的.

(2) 由定理2.1可知 f 在 X 上是 $H_\alpha(r)$ - 有界向量函数,因此按定义2.1(1),存在 $z\in X$ 使

$$f(x)-f(z)\in H_\alpha(r)\ ,\forall x\in X$$

即 $$\sum_{i=1}^{m}Q[f_i(x)-f_i(z)]\geqslant r,\forall x\in X$$

因而 $$\min_{x\in X}\sum_{i=1}^{m}Q[f_i(x)-f_i(z)]\geqslant r$$

由于 $z\in X$,从上式便得

$$\max_{z\in X}\min_{x\in X}\sum_{i=1}^{m}Q[f_i(x)-f_i(z)]\geqslant r$$

上述过程可逆.

2 求解方法

以下讨论求解(VMP)的 αr - 有效解和 αr - 最优解问题.

定理3.1 设 $X\subset R^n$ 是非空集合,$f(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_m(x))^T$ 在 X 上有定义,$\alpha\in A$,$r\in K$.

(1) $\tilde{x}\in M_\alpha^r(f,X)$ 当且仅当 $\tilde{x}\in X$,并且

$$\max_{x\in X(\tilde{x})}\sum_{i=1}^{m}Q[f_i(\tilde{x})-f_i(x)] < r$$

其中 $X(\tilde{x})$ 由(4)式确定.

(2) $x^*\in H_\alpha^r(f,X)$,当且仅当 $x^*\in X$,并且

$$\min_{x\in X}\sum_{i=1}^{m}Q[f_i(x)-f_i(x^*)]\geqslant r$$

证明 (1) 由定义1.1[3]、定义1.2[3]知,$\tilde{x}\in M_\alpha^r(f,X)$ 意味着 $\tilde{x}\in X$ 并且不存在 $x\in X$ 使

$$f(\tilde{x})-f(x)\in H_\alpha(r)\setminus\{0\}$$

由(1)式知,不存在 $x\in X$,使

$$\sum_{i=1}^{m}Q[f_i(\tilde{x})-f_i(x)]\geqslant r,f(x)\neq f(\tilde{x})\quad 即$$

$$\sum_{i=1}^{m} Q[f_i(\tilde{x}) - f_i(x)] < r, \forall x \in X(\tilde{x})$$

上式与所证式等价.

(2) 根据定义 1.1[3]、定义 1.2[3], $x^* \in H_\alpha^r(f,X)$ 意即 $x^* \in X$,并且

$$f(x) - f(x^*) \in H_\alpha(r), \forall x \in X$$

由 $H_\alpha(r)$ 定义,上式即

$$\sum_{i=1}^{m} Q[f_i(x) - f_i(x^*)] \geqslant r, \forall x \in X$$

它等价于所证式.

根据此定理,下面给出求解 αr 有效解和 αr - 最优解的方法.

2.1 极大比较函数法

(1) 构造辅助函数,作极大比较函数

$$G_{\alpha r}(x) = \max_{y \in X(x)} \sum_{i=1}^{m} Q[f_i(x) - f_i(y)], x \in X \tag{5}$$

(2) 求解辅助问题,求解极小化问题

$$\min_{x \in X} G_{\alpha r}(x) \tag{$P_G^{\alpha r}$}$$

设得最优解 $\tilde{x}$.

(3) 检验辅助值,令

$$\tilde{G}_{\alpha r} = G_{\alpha r}(\tilde{x}) \tag{6}$$

若 $\tilde{G}_{\alpha r} < r$,则输出 $\tilde{x}$.

定理 3.2　设 $X \subset R^n$ 是非空集合, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x))^T$ 在 X 上有定义, $\alpha \in A, r \in K$, $\tilde{G}_{\alpha r}$ 由(6) 确定, $\tilde{x}$ 是($P_G^{\alpha r}$) 的最优解.

(1) 若 $\tilde{G}_{\alpha r} < r$,则 $\tilde{x} \in M_\alpha^r(f,X)$;

(2) 若 $\tilde{G}_{\alpha r} \geqslant r$,则 $\tilde{x} \notin M_\alpha^r(f,X)$.

证明　(1) 由 $\tilde{G}_{\alpha r} < r$,按(5) 和(6) 有

$$\max_{y \in X(\tilde{x})} \sum_{i=1}^{m} Q[f_i(\tilde{x}) - f_i(y)] < r$$

因为 $\tilde{x} \in X$,故据定理 3.1(1) 得知 $\tilde{x} \in M_\alpha^r(f,X)$.

(2) 同理,从 $\tilde{G}_{\alpha r} \geqslant r$ 由定理 3.1(1) 即可得证.

2.2 极小比较函数法

(1) 构造辅助函数,作极小比较函数

$$J_{\alpha r}(x) = \min_{y \in X} \sum_{i=1}^{m} Q[f_i(y) - f_i(x)], x \in X \tag{7}$$

(2) 求解辅助问题,求解极大化问题

$$\max_{x \in X} J_{\alpha r}(x) \tag{$P_J^{\alpha r}$}$$

设得最优解 x^*.

(3) 检验辅助值,令

$$J_{\alpha r}^* = J_{\alpha r}(x^*) \tag{8}$$

若 $J_{\alpha r}^* \geqslant r$,则输出 x^*.

定理 3.3　设 $x \subset R^n$ 是非空集合, $f(x) = (f_1(x), \cdots, f_m(x))^T$ 在 X 上有定义, $\alpha \in A, r \in K$, $J_{\alpha r}^*$ 由(8) 确定, x^* 是($P_J^{\alpha r}$) 的最优解.

(1) 若 $J_{\alpha r}^* \geqslant r$,则, $x^* \in H_\alpha^r(f,X)$;

(2) 若 $J_{\alpha r}^{*} < r$,则 $x^{*} \notin H_{\alpha}^{r}(f,X)$.

证明 (1) 从 $J_{\alpha r}^{*} \geqslant r$,按(7)和(8)有

$$\min_{y\in X}\sum_{i=1}^{m} Q[f_i(y) - f_i(x^{*})] \geqslant r$$

因为 $x^{*} \in X$,所以由定理3.1(2)得到 $x^{*} \in H_{\alpha}^{r}(f,X)$.

(2) 从 $J_{\alpha r}^{*} < r$,同样由定理3.1(2)可得证.

参考文献:

[1] 胡毓达.向量空间的较多序类[J].数学年刊,1990,11(3):269~280.
[2] 胡毓达.多目标规划有效性理论[M].上海:上海:上海科学技术出版社,1994.
[3] 顾利勤.多目标规划的 αr - 有效解和 αr - 最优解[J].云南大学学报(自然科学版),2001,23(4A):19~21.
[4] 顾利勤. αr - 锥类及其性质[J].曲靖师范学院学报,2001,20(3):22~23.

(上接第163页)

3 试验结果

目前该自动变速器在昆明农用汽车厂的130型汽车上进行了试验.取得了成功和一定的效果,试验结果如下(表2):

表2 试验结果

1:20坡道	行车距离 /m	行驶时间 /s	平均加速度 /m·s^{-2})	终点时速 /km·h^{-1}
上坡	100	21	0.4535	34
下坡		17	0.692	42

当然,这台变速器还需要作进一步的改进和完善.但为今后研制出适用于各种车型的系列化的汽车自动变速器产品打下较好基础.

4 结论

(1) 由以上分析得知,动量矩机构的主、从动轴之间,可以通过冲量动子的动量矩变化来传递动力,并且是以能量的变换方式来传递的,所以是一种无级变速传动机构;

(2) 当主动方式来传递 ω_1 确定后,所需主动转矩的最大值为 $T_{1\max} = M_f\omega_1^2$.不会给原动机造成过大的载荷.如果从动轴上的阻抗转矩为 T 时,传动比由以下公式决定:

$$i = 1 + \frac{T_2}{M_f\omega_1^2}$$

i 可以随着 T 的变化而相应地变化,自动地调整主、从动轴之间的转速比,从而实现了自动无级变速传动的要求.

参考文献:

[1] 葛安林.自动变速器控制原理与方法[M].北京:人民交通出版社,1994.15~189.
[2] M.米奇克.汽车动力学[M].北京:机械工业出版社,1972.7~154.
[3] 小田柿浩三.汽车设计[M].北京:机械工业出版社,1990. 19~297.
[4] 陈家瑞.汽车构造:下册[M].北京:人民交通出版社,1997.3~77.
[5] 张洪欣.汽车设计[M]. 北京:机械工业出版社,1990.43~171.