多项式突变对拟合精度的影响

陈 陶[1], 杜 黎[2], 杜 焰[3], 周庆新[4], 孟清兰[1]
(1. 昆明理工大学 理学院, 云南 昆明 650093; 2. 昆明理工大学 生物与化学工程学院, 云南 昆明 650224;
3. 昆明理工大学 材料与冶金工程学院, 云南 昆明 650093; 4. 成都信息工程学院, 四川 成都 610041)

摘要: 将复杂系统定义在螺旋系统上, 就可将一个复杂系统看成由若干个简单的子系统叠加而成, 每个子系统的系统方程可以用多项式拟合. 但多项式本身包含突变的可能, 使得在用多项式拟合一些曲线时, 会表现出大幅"尖脉冲", 对拟合精度影响很大. 本文研究了多项式突变的原因, 找到回避突变的方法.

关键词: 因果律; 多项式; 突变; 螺旋系统
中图分类号: O224　　文献标识码: A　　文章编号: 1007-855X(2003)05-0162-04

Effects of the sudden changes in polynomial on Precision

CHEN Tao, DU Li, DU Yan, ZHOU Qing-xin, MENG Qing-lan
(1. Faculty of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, China;
2. Faculty of Biological and Chemical Engineering, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650224, China;
3. Faculty of Materials and Metallurgical Engineering, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, China;
4. Chengdu Znstitute of Information Engineering, Chengdu 610041, China)

Abstract: When defined on spiral system, a complex system can be regarded as a combination of some simple subsystems, and every systematic equation of the subsystems can be replaced with polynomial. But the possibility of the sudden changes contained in polynomial considerably produces " sharp pulse " when expressing some curves with polynomial, which has greatly reduced precision. The reasons of the sudden changes in polynomial are studied in order to find the methods of evading such changes.

Key words: law of causation; polynomial; sudden change; spiral system

0 引 言

通常用这样的方法来表示物理系统: 在系统内部选定系统参量, 并在这些参量所张成的相空间里, 建立系统方程. 这种方法的特点就是在系统内部寻找变化、运动的原因. 这是最一般、最常用的方法. 这种方法的缺点已经很明显, 就是在对复杂系统的分析中, 由于系统内的各元素的性质、元素之间的关系十分复杂, 因此很难建立系统方程, 或建立了系统方程但无法求解, 只能用一些变通的方法求解, 例如, 用拟线性方程或抛物线方程代替非线性系统方程, 求数值解等.

我们在[1]中提出了一种新的复杂系统分析方法, 可以克服上述方法的缺点. 这个方法的特点是: 假设复杂系统的变化、运动的"因果律"遵循"对立统一"律, 从数学的角度来说, 要突破系统参量所张成的相空间限制, 在更深的层次上寻找"因果律"的数学表示, 我们把用数学表示的系统称为原因系统. 在对社会经济系统、大气系统进行的研究表明, 复杂系统的原因系统可以简化为一个三维螺旋线的结构, 原因系统与复杂系统之间具有的因果联系, 就是三维螺旋系统与复杂系统的系统参量之间的联系, 这种联系可以用多项式表示. 这样就使复杂的非线性系统变成定义在螺旋结构上的比较简单的系统. 从这个意义上说: 物理系统可用多项式表示. 这样, 多项式的重要性就凸显出来. 但在多项式拟和时, 有时会表现出大幅的"尖脉冲", 对拟和精度影响很大.

收稿日期: 2003-03-24.

第一作者简介: 陈陶(1961.3~), 女, 讲师; 主要研究方向: 复杂系统及数值计算.

要避免"尖脉冲", 提高拟和精度, 就要分析引起"尖脉冲"的原因, 这牵扯到认识论的一个基本问题, 我们认为从本质上说, 无论用什么样的数学形式来表示一个复杂系统, 都有一个共同之处, 这就是用非实在的、逻辑的、抽象的系统代替实在的物理系统, 这个逻辑的系统与客观的物理系统是有本质区别的, 因此, 在用函数描述客观世界的运动时, 总是有误差的. 引起误差的原因有多种, 其中突变是重要的因素, 而多项式的"尖脉冲"正是由突变引起的. 这里说的突变是指初等突变理论中定义的突变, 即系统从一个平衡态不连续地跳到另一个平衡态. 突变有两个方面的意思, (1) 实际的复杂系统没有突变, 但数学系统却有突变. (2) 实际的复杂系统是非线性系统并且有突变, 数学系统却没有突变.

本文讨论我们在研究工作中所碰到的拟线性方程和抛物线方程的突变, 这是一种由数学系统引起突变, 以及回避的简单方法.

1 拟线性方程中的突变

拟线性方程和抛物线方程可以被看成是多项式的具体形式, 而多项式具有很多优越性质, 例如, 连续、可导等. 但从突变理论的角度来看, 多项式确实可以引起突变.

1.1 初等突变理论的基本结论

突变理论[2] 是研究不连续现象的一门数学分支, 它立足于考虑多个参数变化时平衡点附近分岔情况的全面图象, 特别是其中可能出现的突然变化. 因为突变理论是研究系统的整体性质, 所以一般是用能表征系统全局性质的势函数来研究.

设连续动力系统: $\ddot{x}_i = f(x_i + a_i)$　　(1)

则系统势函数: $V = -\int f \mathrm{d}x$　　(2)

其中 f 表示广义力.

注意 $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$ 与对应的点, 在突变理论中将这些点定义为系统的定态, 由于势函数越小, 的系统稳定性越好, 所以定态的稳定性取决于势函数: 取极小值时, 对应的定态是稳定的, 取极大值时, 对应的定态是不稳定的.

作为实例, 考察简单的一维动力系统: $f(x) = -3x^2 - \mu$　　(3)

对应的势函数: $V(x) = x^3 + \mu x$　　(4)

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 3x^2 + \mu = 0 \qquad (5)$$

当 $\mu < 0$ 时, 系统有两个定态: $x_1 = \sqrt{\frac{-\mu}{3}}$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{-\mu}{3}}$$

由稳定性分析可知, x_1 是稳定的, x_2 是不稳定的.

当 $\mu = 0$ 时, $x_1 = x_2 = 0$, 二个定态和一个拐点和三为一, 在 $x = 0$ 这个点, 随 μ 从零变到小于零, 从这个点分岔出两个定态. 所以这一点是临界分岔点, 在突变理论中这一点被定义为突变点, 它的条件是:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

1.2 多项式螺旋系统的突变

设三维螺旋系统是: $L = \{x_1, x_2, \cdots, x_p\}$　　(7)

其中 x_1 是螺旋系统的系统参量, 为时间的连续函数.

螺旋系统是"原因" 系统, 对应的复杂系统是"结果" 系统, 其系统状态参量为 Y, 将实际的物理系统定义在螺旋系统上, 并根据螺旋结构相似性原理, "原因" 与"结果" 之间有线性关系:

$$Y_c = \alpha_s Y_s + \beta_i X_i + \varepsilon \qquad (8)$$

Y_c 是复杂系统在某时间段的系统状态参量, Y_s 是相似时间段的系统状态参量, ε 是残差, 当两段螺旋

线完全相等时,第二项为零,由于螺旋线不存在周期性,两段螺旋线不会完全相等,只会相似.一、二两项的权重由两段螺旋线的相似程度决定,当相似程度很高时,第一项的权重很高;第二项的权重就很低,当相似程度很低时,则相反.

第一项是线性项,当 x_i 各分量是独立的,(8) 式是线性的,将不会发生突变.当 x_i 各分量不是独立的,(8) 式可以用多元多项式拟合:

$$Y_c = \alpha Y_s + \sum_{j=1}^{n} a_j x_{1j}^{j} + \sum_{j=1}^{n} b_j x_{2j}^{j} + \cdots + \sum_{j=1}^{n} c_j x_{pj}^{j} + \varepsilon \tag{9}$$

既可以将螺旋系统看成由 P 个子系统叠加而成. P 的具体数值由两个方面的因素决定:螺旋系统的计算精度和螺旋系统与物理系统的内在关系.这样的表示我们称之为多项式螺旋结构.

从(9) 式推理得:每个子系统的系统方程的形式仍然可以用多项式表示:

$$\dot{x} = \sum_{j=0}^{n} a_j x_j^{j} \tag{10}$$

突变部分势函数也可以用多项式表示:

$$V = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} x_{ij}^{j} \tag{11}$$

根据(6) 式,既系统的突变点条件,得一个 $m-1$ 阶方程组,将这个方程组中 x 及其系数视为相空间的坐标,就在相空间中决定了关于 x 的超曲面,这个超曲面就是平衡曲面,虽然高维条件下很难确定平衡曲面的形状,但定性地说,当 x 落在曲面的某些部分,就会产生突变.

因为(9) 式的右边含有突变的可能,所以用多项表示螺旋系统与复杂系统之间的因果关系时, Y 的值就可能产生"尖脉冲".

2 避免数学突变的方法

因为(9) 式确定的平衡曲面形状随着势函数阶次的增高,会变得十分复杂,从这个曲面确定的控制参量关系来确定突变点是比较困难的,另一方面,无突变的区域也是很多的,在这种情况下,采用"试探法"是一种简单、可行的办法.基本思路是:在用各种统计检验方法控制精度的条件下,修改(9) 式的系数或 m 的值,达到即有高精度、又无突变或突变很小的目的.具体是通过计算机编程技巧实现:在(9) 式的系数和 m 的值的一定范围内,进行逐一筛选,以各种统计检验为标准,找出最佳的系数和 m 的值.

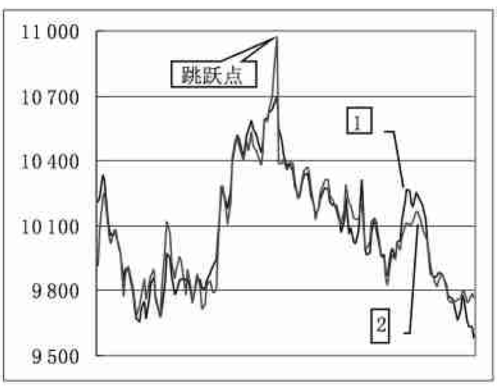

图1 1是实际曲线; 2是拟合曲线

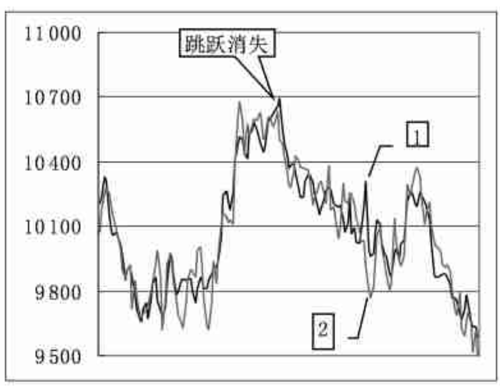

图2 1是实际曲线; 2是拟合曲线

在图1、图2中显示了一个实例,在图1中,多项式的最高次数是6次,发生了较大的"尖脉冲".在图2中多项式的最高次数为9次,各系数也进行了调整,从而使平衡曲面的形状发生改变,避开了"尖脉冲",精度有所提高.但平衡曲面形状的改变,也导致产生了一些新的、较小的"尖脉冲".

如果在预测阶段出现突变,则从复上述操作步骤,修改(9)式的系数和 m 的值,就可以达到回避突变的目的.

(下转第169页)

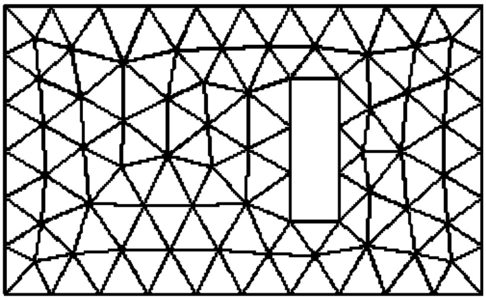

图 7 具内边界的型腔及其网格剖分

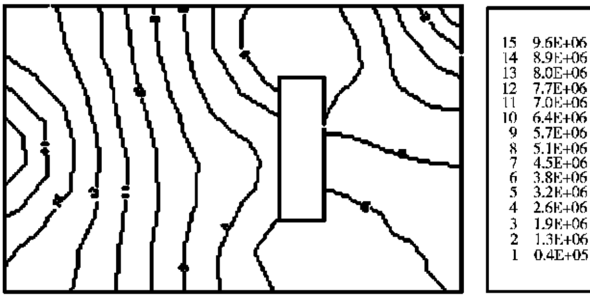

图 8 充满时压力场等值图

参考文献:

[1] German R. M. Powder Injection Molding[C]. Princeton, New jersy, 1990. 7.

[1] C. A. Hieber. A Finite- Element/Finite- Difference Simulation of the Injection Molding Filling Process[J]. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 1980, (7): 1~ 32.

[3] H. H. Chiang, C. A. Hieber, K. K. Wang. Aunified simulation of the filling and postfilling stage in injection molding[J]. Polymer Engineering and Science, 1991, (2): 116~ 123.

[4] Wang V W, C A Hieber and K K Wang. Dynamic Simulation and graphics for the Injection molding of three- dimensional thin parts[J]. Journal of Polymer Engineering, 1986, (7): 22~ 45.

[5] 陶文铨. 数值传热学[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1988. 12.

[6] 毛金英. 粉末注射成形二维充模流动计算机模拟[D]: [硕士论文]. 长沙: 中南大学, 1999.

[7] L. A. Najim, Lee Daeyong. Modelling Of Mold Filling Process For Powder Injection Molding[J]. Polymer Engineering and Science, 1991, (15): 1137~ 1148.

(上接第 164 页)

由于多项式的特性本身就包含了突变的可能, 所以要完全消除数学系统的突变, 只有在(8)式中提高第一项的权重, 把第二项变为线性项, 换言之, 就是要找到最相似的螺旋线线段, 要达到这个目的, 前提条件是有大量的原始数据.

3 结 论

我们认为, 发现复杂系统的螺旋结构, 并将复杂系统定义在螺旋系统上, 是复杂系统研究的重要突破, 而将复杂系统看成由若干个简单的子系统叠加而成, 每个子系统的系统方程用多项式拟合, 是一种简单的数学处理方法. 但多项式本身包含突变的可能, 反映突变特性的平衡曲面由若干个超曲面组成, 其形状复杂, 在工程实践中根据平衡曲面的形状回避突变是非常困难的, 可以采用"试探法"这种简单方法, 达到回避突变、提高拟合及预测精度的目的, 但这不能算是一种理想的方法. 考虑到在工程问题中, 大量使用多项式来拟合非线性函数, 进一步研究多项式的突变特性是有意义的.

至于多项式螺旋结构, 要完全消除数学系统的突变, 就要充分提高螺旋系统的相似性, 将多项式的次数降到二阶以下. 除此之外, 可以考虑用其他一些函数来代替多项式, 例如三角函数, 也可以消除突变, 提高精度. 有关的研究结果将在另文中讨论.

参考文献:

[1] 杜黎, 陈陶, 等. 跨学科基本规律的螺旋表示[J]. 昆明理工大学学报(理工版), 2002, 27(4): 123~ 128.

[2] 林振山. 非线性力学与大气科学[M]. 南京: 南京大学出版社, 1993. 63~ 83.