大半环子半环的和与积

杨宗文[1], 杨柱元[2], 李友宝[3]
(1. 云南大学 数学系, 云南 昆明 650091; 2. 云南民族大学 数学与计算机科学学院,
云南 昆明 650031; 3. 云南大学 数学与统计学院, 云南 昆明 650091)

摘要: 定义了一类特殊的半环——大半环, 讨论了大半环由子集生成的子半环、子半环的和与积的结构, 子半环的积对和的分配关系, 证明了大半环类是完备代数类及可积代数类, 从而是完备代数正规类及可积代数正规类.

关键词: 半环; 代数正规类
中图分类号: O153.3 文献标识码: A 文章编号: 1007-855X(2007)06-0113-06

Sum and Product of Subsemi-Rings of Big Semi-Ring

YANG Zong-wen[1], YANG Zhu-yuan[2], LI You-bao[3]
(1. Department of Mathematics, Yunnan University, Kunming 650091, China;
2. School of Mathematics and Computer Science, Yunnan Nationalities University, Kunming 650031, China;
3. School of Mathematics and Statistics, Yunnan University, Kunming 620091, China)

Abstract: One kind of special semi-rings——big semi-ring is defined. Elaborated discussion is then made on the structures of the subsemi-rings generated by a subset of a big semi-ring, the structures of sum and product of subsemi-rings, and the distribution product over the sum of subsemi-rings. It is thereafter shown that the class of big semi-rings is a normal class of integrable algebras, and therefore a normal class of complete algebras.

Key words: semi-ring; normal class of algebras

0 引 言

环的根理论已经得到非常广泛的研究, 文献[1]进行了系统的总结; 代数正规类的根理论研究也有了许多成果[2~9]. 本文引入大半环的概念, 并证明大半环类是完备代数正规类[8]、可积代数正规类[9]从而将环的根理论推广到大半环类, 为此需要对大环的子半环、左理想、右理想、理想及可达子半环的运算性质进行研究.

首先引入大半环的概念及相关性质.

定义 1 S是一个非空集合, S上定义了 2个 2元运算: 加法"+"与乘法"•", 并且满足:

(1) $(S, +)$是交换半群, 有 1个零元(记为 0), 并且满足: $\forall a, b\in S$, 存在 $i\in S$使得 $a=b+i$或者 $b=a+i$(如果 $a=b+i$, 记 $i=a-b$; 如果 $b=a+i$, 记 $i=b-a$; 如果 $a+i=0$, 则称 i是 a的负元, 记为 $-a$); 如果存在 $c\in S$使得 $a+c=b+c$, 则有 $a=b$;

(2) $(S, \cdot)$是半群($\forall a, b\in S$, $a\cdot b$记为 ab);

(3) $\forall a, b, c\in S$, 有 $(a+b)c=ac+bc$和 $c(a+b)=ca+cb$, 即乘法对加法满足分配律;

则称 $(S, +, \cdot)$为一个大半环(简记为 S).

引理 1 如果 S是一个大半环. 则:

收稿日期: 2007-04-11. 基金项目: 国家民委基金项目资助(项目编号: 05YN06); 云南省教育厅基金项目资助(项目编号: 07Z10533).

第一作者简介: 杨宗文(1965-), 男, 讲师, 硕士. 主要研究方向: 代数、数论、计算数学.
E-mail: zwyang@ynu.edu.cn

(1) $\forall a\in S$, 有 $a0=0a=0$;

(2) $\forall a, b\in S$, 存在 $i\in S$, 使得 $a+i=b$, 则 i是唯一的;

(3) $\forall a, b\in S$, $b+(a-b)=(a-b)+b=a$.

证明 (1) $\forall a\in S$, 因为 $a0+0=a0=a(0+0)=a0+a0$, 所以 $a0=0$; 同理 $0a=0$;

(2) $\forall a, b\in S$, 如果 $i, i'\in S$, 使得 $b=a+i$, $b=a+i'$, 所以 $a+i=a+i'$. 据定义1有 $i=i'$, 即使得 $a+i=b$的 i是唯一的.

(3) $\forall a, b\in S$, 据定义的 $b+(a-b)=a$, 故 $(a-b)+b=b+(a-b)=a$.

证毕.

定义2 S是一个大半环, $\forall a, b\in S$, 如果 $b=a+i$, 记 $i=b-a$; 如果 $a+i=0$, 则称 i是的负元, 记为 $-a$.

如果 S是一个环, 则 S是大半环, 且 $\forall a\in S$, a在 S中皆有负元 $-a$.

例1 $S_1=\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$, 加法"+"与乘法"•"分别是数的加法和乘法, 则 S是大半环; $\forall a\in S$, $a>0$在 S中没有负元. $S_2=\{(a, b)\mid a, b\in Z$ 且 $a\geqslant 0\}$, 加法"+"与乘法"•"分别定义为: $(a_1, b_1)+(a_2, b_2)=(a_1+a_2, b_1+b_2)$, $(a_1, b_1)(a_2, b_2)=(a_1a_2, b_1b_2)$, 则 S是大半环; $(1, 0)$, $(0, 1)\in S$, $(1, 0)$在 S中没有负元, $(0, 1)$在 S中有负元 $(0, -1)$. $S_3=\{1, 2, 3, \cdots\}$, 加法"+"与乘法"•"分别是数的加法和乘法, 则 S不是大半环.

如果 S是一个环, 则 S是大半环, 且 $\forall a\in S$, a在 S中有负元 $-a$.

注1 大半环 S是"含有一个环一半以上元素的环"或"任意2个元素有单边减法的环"的代数系统. S是一个大半环, $\forall a\in S$, a在 S中不一定有负元 $-a$.

定义3 设 S是一个大半环, I是 S的一个非空子集.

(1) 如果 $(I, +, \cdot)$本身是一个大半环, 并且 $\forall a, b\in S$, $a+b=0$, $a\in I$, 有 $b\in I$, 则称 $(I, +, \cdot)$是大半环 S的一个子半环, 记为 $I\leqslant S$;

(2) 如果 $I\leqslant S$, 且 $\forall s\in S$, $i\in I$有 $is\in I$(或 $si\in I$), 则称 I是大半环 S的一个右理想(或左理想), 记 $I\lhd_r S$(或 $I\lhd_l S$). 如果 I同时是大半环 S的右理想和左理想, 则称 I是大半环 S的一个理想, 记 $I\lhd S$.

(3) 如果 $I\leqslant S$, 并且存在 $I=I_1\leqslant I_2\leqslant\cdots\leqslant I_n\leqslant I_{n+1}=S$, 使得 $I_i\lhd I_{i+1}$, $i=1, 2, \cdots, n$, $n\geqslant 1$, 则称 I是大半环 S的一个可达子半环.

注2 这里大半环的"理想"是文献[10]中的"强理想".

以下多项式 f皆是常数项为0的整系数多项式. 对大半环 S的2个子半环 $H, N, H+N, HN$分别表示 S的由 $\{h+n\mid h\in H, n\in N\}$及 $\{hn\mid h\in H, n\in N\}$生成的子环. 设 T是 S的1个非空子集, $\langle T\rangle$表示 T在 A中生成的子环, L_S^s, L_S^r, L_S^l, L_S分别表示 S的全体子环, 全体右理想, 全体左理想, 全体理想之集.

根据定义2有引理2和引理3.

引理2 如果 S是一个大半环, I是 S的一个非空子集. 则:

(1) $I\leqslant S$当且仅当 $0\in I$; $\forall a, b\in I$有 $a+b$, $ab\in I$; $\forall a, b\in S$, $a+b=0$且 $a\in I$, 则 $b\in I$; $\forall a, b\in I$, 存在 $i\in I$, 使得 $a+i=b$或 $b+i=a$;

(2) $I\lhd_r S$当且仅当 $0\in I$; $\forall a, b\in I$有 $a+b\in I$; $\forall i\in I$, $s\in S$, 有 $is\in I$; $\forall a, b\in S$, $a+b=0$且 $a\in I$, 则 $b\in I$; $\forall a, b\in I$, 存在 $i\in I$, 使得 $a+i=b$或 $b+i=a$;

(3) $I\lhd_r S$当且仅当 $I\leqslant S$并且 $\forall i\in I$, $s\in S$, 有 $is\in I$;

(4) $I\lhd_l S$当且仅当 $0\in I$; $\forall a, b\in I$有 $a+b\in I$; $\forall i\in I$, $s\in S$, 有 $si\in I$; $\forall a, b\in S$, $a+b=0$且 $a\in I$, 则 $b\in I$; $\forall a, b\in I$, 存在 $i\in I$, 使得 $a+i=b$或 $b+i=a$;

(5) $I\lhd_r S$当且仅当 $I\leqslant S$并且 $\forall i\in I$, $s\in S$, 有 $si\in I$;

(6) $I\lhd S$当且仅当 $0\in I$; $\forall a, b\in I$有 $a+b\in I$; $\forall i\in I$, $s\in S$, 有 is, $si\in I$; $\forall a, b\in S$, $a+b=0$且 $a\in I$, 则 $b\in I$; $\forall a, b\in I$, 存在 $i\in I$, 使得 $a+i=b$或 $b+i=a$;

(7) $I\lhd S$当且仅当 $I\leqslant S$并且 $\forall i\in I$, $s\in S$, 有 is, $si\in I$.

引理 **3**　如果 S 是一个大半环, $J \leqslant I$, $I \leqslant S$, 则 $J \leqslant S$.

引理 **4**　如果 S 是一个大半环, T 是 S 的一个非空子集, $I, J, K \leqslant S$. 则:

(1) $\langle T \rangle = \{f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid$ 存在 $i_k, j_k \in S$, 使得 $i_k = j_k + x_k, k = 1, 2, \cdots, n, n \geqslant 1\}$;

(2) $I \cap J = \{k \mid k \in I, k \in J\} \leqslant S$;

(3) $I + J = \{f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid$ 存在 $i_{1k}, i_{2k} \in I, j_{1k}, j_{2k} \in J$, 使得 $i_{1k} + j_{1k} = i_{2k} + j_{2k} + x_k, k = 1, 2, \cdots, n, n \geqslant 1\}$;

(4) 如果 $\{I_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ 是 S 的子半环集, 则 $\bigcap_{\alpha \in \Gamma} I_\alpha = \{k \mid k \in I_\alpha, \forall \alpha \in \Gamma\} \leqslant S$,

$\sum_{\alpha \in \Gamma} I_\alpha = \{f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid i_{mk_1 1} + i_{mk_2 1} + \cdots + i_{mk_{l_m} 1} = i_{mk_1 2} + i_{mk_2 2} + \cdots + i_{mk_{l_m} 2} + x_m, i_{mk_p q} \in I_{mk_p q}, \{mk_1 1, mk_2 1, \cdots, mk_{l_m} 1\}, \{mk_1 2, mk_2 2, \cdots, mk_{l_m} 2\}$ 是 Γ 的有限子集$\} \leqslant S$;

(5) $IJ = \{f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid$ 存在 $i_{1k}, i_{2k} \in I, j_{1k}, j_{2k} \in J$, 使得 $i_{1k} j_{1k} = i_{2k} j_{2k} + x_k, k = 1, 2, \cdots, n, n \geqslant 1\}$;

(6) $(IJ)K = I(JK) = \{f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid$ 存在 $i_{1l}, i_{2l} \in I, j_{1l}, j_{2l} \in J, k_{1l}, k_{2l} \in K$, 使得 $i_{1l} j_{1l} k_{1l} = i_{2l} j_{2l} k_{2l} + x_l, l = 1, 2, \cdots, n, n \geqslant 1\}$ (记为 IJK).

引理 **5**　如果 S 是一个大半环, $I \leqslant S$. 则:

(1) $\forall a, b, c \in S$, 如果存在 $a - b$, 则 $ca - cb$, $ac - bc$ 皆存在, 且 $c(a - b) = ca - cb$, $(a - b)c = ac - bc$;

(2) 如果 $a, b \in I$, 且在 S 中存在 $a - b$, 则 $a - b \in I$, 即如果 $b + i = a$, $a, b \in I$, $i \in S$, 则 $i \in I$;

(3) $\forall a, b, c \in S$, 则 $a - b$, $(a - b) - c$ 存在当且仅当 $a - (b + c)$ 存在; 此时有 $(a - b) - c = a - (b + c)$;

(4) $\forall a, b, c \in S$, 如果存在 $a - b$, 则 $(a + c) - b$ 存在, 且 $c + (a - b) = (a - b) + c = (a + c) - b$;

(5) $\forall a, b, c, d \in S$, 如果存在 $a - b$, $c - d$, 则 $(a - b)(c - d) = (ac + bd) - (ad + bc)$.

证明　(1) $\forall a, b, c \in S$, 因为存在 $a - b$, 即存在 $k = a - b \in S$, 使得 $a = b + k$, 从而 $ca = c(b + k) = cb + ck$, $ac = (b + k)c = bc + kc$, 即 $ck = ca - cb$, $kc = ac - bc$, 亦即 $c(a - b) = ca - cb$, $(a - b)c = ac - bc$;

(2) 如果 $a, b \in I$, 且在 S 中存在 $a - b$, 即存在 $k = a - b \in S$, 使得 $a = b + k$, 据引理 3有 $k \in I$, 即 $a - b \in I$;

(3) $\forall a, b, c \in S$, 如果 $a - b$, $(a - b) - c$ 存在, 即有 $t = a - b$, $s = (a - b) - c \in S$, 所以 $a = b + t$, $a - b = c + s$, 故 $a = b + t = b + (a - b) = b + (c + s) = (b + c) + s$, 即 $a - (b + c)$ 存在, 且 $(a - b) - c = s = a - (b + c)$. 反之如果 $t = a - (b + c)$ 存在, 则 $(b + c) + t = b + (c + t) = a$, 即 $a - b$ 存在且 $c + t = a - b$, 从而 $t = (a - b) - c$ 存在, 且 $(a - b) - c = t = a - (b + c)$;

(4) $\forall a, b, c \in S$, 因为存在 $a - b$, 即有 $t = a - b \in S$, 所以 $a = b + t$, 从而 $a + c = b + t + c = b + (c + t)$, 故 $(a + c) - b$ 存在, 且 $(a + c) - b = c + t = c + (a - b) = (a - b) + c$;

(5) $\forall a, b, c, d \in S$, 如果存在 $a - b$, $c - d$, 则 $(a - b)(c - d) = (a - b)c - (a - b)d = (ac - bc) - (ad - bd) = (ac - bc + bd) - ad = ((ac + bd) - bc) - ad = (ac + bd) - (bc + ad) = (ac + bd) - (ad + bc)$.

证毕.

定理 **1**　如果 S 是一个大半环, $I, J \leqslant S$. 则:

(1) $I \cap J = \{k \mid k \in I, k \in J\} \leqslant S$;

(2) 设 $K_1 = \{s \in S \mid i_1 + i_1 = i_2 + i_2 + s, i_1, i_2 \in I, j_1, j_2 \in J\}$. 则 K_1 满足条件: $0 \in K_1$; $\forall k_1, k_2 \in K_1$, 有 $k_1 + k_2 \in K_1$ 并且存在 $k \in K_1$, 使得 $k_1 = k_2 + k$ 或 $k_1 + k = k_2$; 如果 $k_1 + s = 0$, $k_1 \in K_1$, $s \in S$, 则 $s \in K_1$;

(3) 设 $K_2 = \{s \in S \mid \sum i_{1l} j_{1l} = \sum i_{2m} j_{2m} + s, i_1, i_{1l}, i_{2m} \in I, j_{1l}, j_{2m} \in I\}$. 则 K_2 满足条件: $0 \in K_2$; $\forall k_1$,

$k_2 \in K_2$, 有 $k_1 + k_2 \in K_2$ 并且存在 $k \in K_2$, 使得 $k_1 = k_2 + k$ 或 $k_1 + k = k_2$; 如果 $k_1 + s = 0$, $k_1 \in K_2$, $s \in S$, 则 $s \in K_2$.

证明 (1) 显然有 $0 \in I \cap J$, $\forall k, l \in I \cap J$, $k + l, kl \in I \cap J$.

设 $k, l \in I \cap J$, 则 $k, l \in I$ 且 $k, l \in J$, 所以存在 $m \in I$ 和 n, 使得 $k = l + m$ 或 $k + m = l$ 和 $k = l + n$ 或 $k + n = l$.

如果 $k = l + m$ 和 $k = l + n$, 则 $l + m = l + n$, $m = n \in I \cap J$;

如果 $k + m = l$ 和 $k + n = l$, 则 $k + m = k + n$, $m = n \in I \cap J$;

如果 $k = l + m$ 和 $k + n = l$, 则 $k + n = l + m + n = l$, $m + n = 0$, 据引理 5有 $m, n \in I \cap J$;

如果 $k + m = l$ 和 $k = l + n$, 则 $k + m = l + n + m = l$, $n + m = 0$, 据引理 5有 $m, n \in I \cap J$.

据引理 2有 $I \cap J = \{k \mid k \in I, k \in J\} \leqslant S$.

(2) 显然有 $0 \in K_1$.

$\forall k_1, k_2 \in K_1$, 则存在 $i_{11}, i_{12}, i_{21}, i_{22} \in I$, $j_{11}, j_{12}, j_{21}, j_{22} \in J$, 使得 $(i_{11} + i_{21}) + (j_{11} + j_{21}) = (i_{12} + i_{22}) + (j_{12} + j_{22}) + (k_1 + k_2)$, 因此 $k_1 + k_2 \in K_1$. 另一方面, 又存在 $k \in S$, 使得 $k_1 = k_2 + k$ 或 $k_1 + k = k_2$, 因此 $(i_{11} + i_{22}) + (j_{11} + j_{22}) + k_2 = (i_{12} + i_{21}) + (j_{12} + j_{21}) + k_1 = (i_{12} + i_{21}) + (j_{12} + j_{21}) + k_2 + k$ 或 $(i_{11} + i_{22}) + (j_{11} + j_{22}) + k_1 + k = (i_{11} + i_{22}) + (j_{11} + j_{22}) + k_2 = (i_{12} + i_{21}) + (j_{12} + j_{21}) + k_1$, 所以 $(i_{11} + i_{22}) + (j_{11} + j_{22}) = (i_{12} + i_{21}) + (j_{12} + j_{21}) + k$ 或 $(i_{11} + i_{22}) + (j_{11} + j_{22}) + k = (i_{12} + i_{21}) + (j_{12} + j_{21})$, 从而 $k \in K_1$ 且满足 $k_1 = k_2 + k$ 或 $k_1 + k = k_2$. 如果满足 $k_1 = k_2 + s$, $s \in S$, 则 $(i_{11} + i_{22}) + (j_{11} + j_{22}) + k_1 = (i_{11} + i_{22}) + (j_{11} + j_{22}) + k_2 + s = (i_{12} + i_{21}) + (j_{12} + j_{21}) + k_2$, 因此 $(i_{11} + i_{22}) + (j_{11} + j_{22}) + s = (i_{12} + i_{21}) + (j_{12} + j_{21})$, 故 $s \in K_1$. 如果满足 $k_1 + s = k_2$, $s \in S$, 则类似可证 $s \in K_1$;

(3) 显然有 $0 \in K_2$.

$\forall k_1, k_2 \in K_2$, 则存在 $i_{1l_1}, i_{1l_2}, i_{2m_1}, i_{2m_2} \in I$, $j_{1l_1}, j_{1l_2}, j_{2m_1}, j_{2m_2} \in J$, 使得 $\sum i_{1l_1} j_{1l_1} = \sum i_{2m_1} j_{2m_1} + k_1$, $\sum i_{1l_2} j_{1l_2} = \sum i_{2m_2} j_{2m_2} + k_2$, 因此 $(\sum i_{1l_1} j_{1l_1} + \sum i_{1l_2} j_{1l_2}) = (\sum i_{2m_1} j_{2m_1} + \sum i_{2m_2} j_{2m_2}) + (k_1 + k_2)$, 所以 $k_1 + k_2 \in K_2$. 另一方面, 又存在 $k \in S$, 使得 $k_1 = k_2 + k$ 或 $k_1 + k = k_2$, 因此 $\sum i_{1l_1} j_{1l_1} + \sum i_{2m_2} j_{2m_2} + k_2 = \sum i_{1l_2} j_{1l_2} + \sum i_{2m_1} j_{2m_1} + k_1 = \sum i_{1l_2} j_{1l_2} + \sum i_{2m_1} j_{2m_1} + k_2 + k$ 或 $\sum i_{1l_1} j_{1l_1} + \sum i_{2m_2} j_{2m_2} + k_2 = \sum i_{1l_1} j_{1l_1} + \sum i_{2m_2} j_{2m_2} + k_1 + k = \sum i_{1l_2} j_{1l_2} + \sum i_{2m_1} j_{2m_1} + k_1$. 从而 $\sum i_{1l_1} j_{1l_1} + \sum i_{2m_2} j_{2m_2} = \sum i_{1l_2} j_{1l_2} + \sum i_{2m_1} j_{2m_1} + k$ 或 $\sum i_{1l_1} j_{1l_1} + \sum i_{2m_2} j_{2m_2} + k = \sum i_{1l_2} j_{1l_2} + \sum i_{2m_1} j_{2m_1}$, 进而有 $k \in K_2$ 且满足 $k_1 = k_2 + k$ 或 $k_1 + k = k_2$. 如果满足 $k_1 = k_2 + s$, $s \in S$, 则 $\sum i_{1l_1} j_{1l_1} + \sum i_{2m_2} j_{2m_2} + k_2 = \sum i_{1l_2} j_{1l_2} + \sum i_{2m_1} j_{2m_1} + k_1 = \sum i_{1l_2} j_{1l_2} + \sum i_{2m_1} j_{2m_1} + k_2 + s$, 故 $s \in K_2$. 如果满足 $k_1 + s = k_2$, $s \in S$, 则类似可证 $s \in K_1$.

证毕.

S 是一个大半环, $I, J \leqslant S$, 用 $I + J$, IJ 分别表示 S 的由定理 1中 K_1, K_2 生成的大子半环,

定理 2 如果 S 是一个大半环, $H, N \leqslant S$. 则:

(1) $HN = \{s \in S \mid \sum t_{l_1} t_{l_2} \cdots t_{l_{mk}} = \sum t_{r_1} t_{r_2} \cdots t_{r_{pq}} + s, t_f = h_f + n_f, h_f \in H, n_f \in N\}$,

$H + N = \{s \in S \mid h_1 + t_1 + n_1 = h_2 + t_2 + n_2 + s, h_1, h_2 \in H, n_1, n_2 \in N, t_1, t_2 \in HN\}$;

(2) 如果 $N = I \lhd_r S$, 则 $HI = \{s \in S \mid \sum h_m i_m = \sum h_n i_n + s, h_m, h_n \in H, i_m, i_n \in I\} \lhd_r S$,

$IH = \{s \in S \mid \sum i_m h_m = \sum i_n h_n + s, h_m, h_n \in H, i_m, i_n \in I\} \leqslant S$;

(3) 如果 $N = I \lhd_l S$, 则 $HI = \{s \in S \mid \sum h_m i_m = \sum h_n i_n + s, h_m, h_n \in H, i_m, i_n \in I\} \leqslant S$,

$IH = \{s \in S \mid \sum i_m h_m = \sum i_n h_n + s, h_m, h_n \in H, i_m, i_n \in I\} \lhd_l S$;

(4) 如果 $H = I \lhd_l S$, $N = J \lhd_r S$, 则 $IJ \lhd S$;

(5) 如果 $H = I$, $N = J \lhd$ (或 $\lhd_r$, $\lhd_l$) S, 则 $I + J = \{s \in S \mid h_1 + n_1 = h_2 + n_2 + s, h_1, h_2 \in H, n_1, n_2$

$\in N\} = \{s \in S \mid s = (h_1 + n_1) - (h_2 + n_2), h_1, h_2 \in H, n_1, n_2 \in N\} \lhd$ (或 $\lhd_r$, $\lhd_l$) S.

(6) 如果 $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 是 S 的理想(或左理想、右理想), 则 $\sum_{\alpha\in\Gamma} I_\alpha = \{s \in S \mid s = \sum((i_{k_{11}} + i_{k_{12}} + \cdots + i_{k_{1n}}) - (i_{k_{21}} + i_{k_{22}} + \cdots + i_{k_{2n}})), i_{k_{lj}} \in I_{k_{lj}}, \{k_{l1}, k_{l2}, \ldots, k_{ln}\}$ 是 Γ 的有限子集$\}$ 是 S 的理想(或左理想、右理想).

证明　显然成立. 证毕.

在 L_S^s, L_S^r, L_S^l, L_S 中定义 $H \vee N = H + N, H \wedge N = H \cap N$, 则根据定理 1, 定理 2有:

定理 3　S 是一个环, 则 $(L_S^s, \vee, \wedge)$ 是完备格, $(L_S^r, \vee, \wedge)$, $(L_A^l, \vee, \wedge)$, $(L_A, \vee, \wedge)$ 是 $(L_S^s, \vee, \wedge)$ 的完备子格, $L_S = L_S^r \cap L_S^l$.

定理 4　S 是一个大半环. 则:

(1) 如果 $I, K \lhd S$, $J \lhd I$, 则 $J + K \lhd I + K \lhd S$, $JK \lhd J \cap K \lhd I \cap K \lhd S$;

(2) 如果 $K \lhd S$, I 是 S 的可达子半环, 则 $I + K$, $I \cap K$, IK, KI 是 S 的可达子半环.

证明　(1) 由定理 1, 定理 2有 $J + K$, $I + K$, $J \cap K$, $I \cap K$, JK, $KJ \leqslant S$, $I + K \lhd S$, 从而 $J \cap K \leqslant I \cap K \lhd S$.

$\forall s \in I + K$, $t \in J + K$, 则存在 $i_1, i_2 \in I$, $j_1, j_2 \in J$, $k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22} \in K$, 使得 $j_1 + k_{11} = j_2 + k_{21} + t$, $i_1 + k_{12} = i_2 + k_{22} + s$, 即 $t = (j_1 + k_{11}) - (j_2 + k_{21})$, $s = (i_1 + k_{12}) - (i_2 + k_{22})$. 故 $ts = ((j_1 + k_{11}) - (j_2 + k_{21}))((i_1 + k_{12}) - (i_2 + k_{22})) = ((j_1 + k_{11})(i_1 + k_{12}) + (j_2 + k_{21})(i_2 + k_{22})) - ((j_2 + k_{21})(i_1 + k_{12}) + (j_1 + k_{11})(i_2 + k_{22})) = (j_1 i_1 + (j_1 k_{12} + k_{11} i_1 + k_{11} k_{12}) + j_2 i_2 + (j_2 k_{22} + k_{21} i_2 + k_{21} k_{22})) - (j_2 i_1 + (j_2 k_{12} + k_{21} i_1 + k_{21} k_{12}) + j_1 i_2 + (j_1 k_{22} + k_{121} i_2 + k_{11} k_{22})) = ((j_1 i_1 + j_2 i_2) + (j_1 k_{12} + k_{11} i_1 + k_{11} k_{12}) + (j_2 k_{22} + k_{21} i_2 + k_{21} k_{22})) - ((j_2 i_1 + j_1 i_2) + (j_2 k_{12} + k_{21} i_1 + k_{21} k_{12}) + (j_1 k_{22} + k_{121} i_2 + k_{11} k_{22})) = (j_1' + k_{11}') - (j_2' + k_{21}')$ (因为 $I, K \lhd S$, $J \lhd I$, 故其中 $j_1' = j_1 i_1 + j_2 i_2$, $j_2' = j_2 i_1 + j_1 i_2 \in J$, $k_{11}' = (j_1 k_{12} + k_{11} i_1 + k_{11} k_{12}) + (j_2 k_{22} + k_{21} i_2 + k_{21} k_{22})$, $k_{21}' = (j_2 k_{12} + k_{21} i_1 + k_{21} k_{12}) + (j_1 k_{22} + k_{121} i_2 + k_{11} k_{22}) \in K) \in J + K$. 同理有 $st \in K) \in J + K$. 所以 $J + K \lhd I + K$.

$\forall s \in J \cap K$, $t \in JK$, 则有 $\sum j_m k_m = \sum j_n k_n + t$　$j_m, j_n \in J$, $k_m, k_n \in K$, 故 $s \sum j_m k_m = \sum (s j_m) k_m = s(\sum j_n k_n + t) = \sum (s j_n) k_n + st$, $s j_m, s j_n \in J$, $k_m, k_n \in K$, 所以 $st \in JK$. 类似可证 $ts \in JK$, 所以 $JK \lhd J \cap K$.

(2) $K \lhd S$, I 是 S 的可达子半环, 则存在 $I = I_1 \leqslant I_2 \leqslant \cdots \leqslant I_n \leqslant I_{n+1} = S$, 使得 $I_i \lhd I_{i+1}$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 类似(1) 可证 $I + K \lhd I_2 + K \lhd \cdots \lhd I_n + K \lhd S$, $I \cap K \lhd I_2 \cap K \lhd \cdots \lhd I_n \cap K \lhd S$, $IK, KI \lhd I \cap K \lhd I_2 \cap K \lhd \cdots \lhd I_n \cap K \lhd S$, 所以 $I + K$, $I \cap K$, IK, KI 是 S 的可达子半环.

证毕.

定理 5　如果 S 是一个大半环, $H \leqslant S$, $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 是 S 的理想(或左理想、右理想)集, 则

$$H\Big(\sum_{\alpha\in\Gamma} I_\alpha\Big) = \sum_{\alpha\in\Gamma} (H I_\alpha), \qquad \Big(\sum_{\alpha\in\Gamma} I_\alpha\Big) H = \sum_{\alpha\in\Gamma} (I_\alpha H).$$

证明　显然有 $\sum_{\alpha\in\Gamma} (H I_\alpha) \subseteq H(\sum_{\alpha\in\Gamma} I_\alpha)$. 又 $\forall x \in H(\sum_{\alpha\in\Gamma} I_\alpha)$, 由定理 **2**有 $\sum_{\alpha\in\Gamma} I_\alpha = \sum((i_{k_{11}} + i_{k_{12}} + \cdots + i_{k_{1n}}) - (i_{k_{21}} + i_{k_{22}} + \cdots + i_{k_{2n}}))$, $i_{k_{lj}} \in I_{k_{lj}}$, $\{k_{l1}, k_{l2}, \ldots, k_{ln}\}$ 是 Γ 的有限子集$\}$ 是 S 的理想(或左理想、右理想), 从而再由定理 2有 $x = \sum (h_{l1} t_{l1} - h_{l2} t_{l2})$ (其中 $t_{l1}, t_{l2} \in \sum \{I_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$), 所以 $x = \sum (h_{l1}((i_{l111} + i_{l112} + \cdots + i_{l11n_{l11}}) - (i_{l21} + i_{l22} + \cdots + i_{l12n_{l1}})) - h_{l2}((i_{l211} + i_{l212} + \cdots + i_{l21n_{l2}}) - (i_{l221} + i_{l222} + \cdots + i_{l22n_{l2}}))) \in \sum_{\alpha\in\Gamma} (H I_\alpha)$, 因此 $H(\sum_{\alpha\in\Gamma} I_\alpha) \subseteq \sum_{\alpha\in\Gamma} (H I_\alpha)$, 从而 $H(\sum_{\alpha\in\Gamma} I_\alpha) = \sum_{\alpha\in\Gamma} (H I_\alpha)$. 类似可证 $(\sum_{\alpha\in\Gamma} I_\alpha) H = \sum_{\alpha\in\Gamma} (I_\alpha H)$. 证毕.

推论 1　如果 S 是一个环, H 是 S 的可达子环, $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 是 S 的理想(或左理想、右理想)集, 则

$$H\Big(\sum_{\alpha\in\Gamma} I_\alpha\Big) = \sum_{\alpha\in\Gamma} (H I_\alpha), \qquad \Big(\sum_{\alpha\in\Gamma} I_\alpha\Big) H = \sum_{\alpha\in\Gamma} (I_\alpha H).$$

推论 2　如果 S 是一个环, H 是 S 的理想(或左理想、右理想), $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 是 S 的理想(或左理想、右理想)集, 则

$$H\left(\sum_{\alpha\in\Gamma} I_\alpha\right) = \sum_{\alpha\in\Gamma}(HI_\alpha), \qquad \left(\sum_{\alpha\in\Gamma} I_\alpha\right)H = \sum_{\alpha\in\Gamma}(I_\alpha H).$$

定理 6 如果 S 是一个环, $H, N \leqslant S$, K 是 S 的理想, 则

$$((H+K)/K)((N+K)/K) = (HN+K)/K.$$

证明 $\forall\ x \in ((H+K)/K)((N+K)/K)$, 则据引理 4有 $x = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 其中 $h_{i1}n'_{i1} = h'_{i2}n'_{i2} + x_i$, $h'_{i1}, h'_{i2} \in (H+K)/K$, $n'_{i1}, n'_{i2} \in (N+K)/K$, $i = 1, 2, \cdots, n$, $n \geqslant 1$, 从而 $h'_{i1} = h_{i1} + K$, $h'_{i2} = h_{i2} + K$, $n'_{i1} = n_{i1} + K$, $n'_{i2} = n_{i2} + K$, 其中 $h_{i1}, h_{i2} \in H$, $n_{i1}, n_{i2} \in N$, $x_i = t_i + K$, $t_i \in H$, $i = 1, 2, \cdots, n$, $n \geqslant 1$. 所以 $h_{i1}n_{i1} + K = (h_{i2}n_{i2} + K) + (t_i + K) = (h_{i2}n_{i2} + t_i) + K$, 故存在 $k \in K$, 使得 $h_{i1}n_{i1} = (h_{i2}n_{i2} + t_i) + k$或者 $h_{i1}n_{i1} + k = h_{i2}n_{i2} + t_i$. 如果 $h_{i1}n_{i1} = (h_{i2}n_{i2} + t_i) + k$, 则 $t_i + k \in HN$, 从而 $x_i = t_i + K = t_i + k + K \in (HN+K)/K$. 如果 $h_{i1}n_{i1} + k = (h_{i2}n_{i2} + t_i)$, 则存在 $t \in S$, 使得 $k + t = t_i$或者 $k = t_i + t$, 从而 $h_{i1}n_{i1} = {}_{i2}n_{i2} + t$ 或者 $h_{i1}n_{i1} + t = {}_{i2}n_{i2}$, 即 $t \in HN$. 当 $k + t = t_i$, $x_i = t_i + K = t + k + K = t + K \in (HN+K)/K$; 当 $k = t_i + t$, 则 $x_i + (t + K) = (t_i + t) + K = k + K = 0$, $t + K \in (HN+K)/K$, $(HN+K)/K$ 是 S/K 的子半环, 从而 $x_i \in (HN+K)/K$. 因此 $x = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in (HN+K)/K$, 故 $((H+K)/K)((N+K)/K) \subseteq (HN+K)/K$. 反之, $\forall\ x \in HN$, 类似可证 $x + K \in ((H+K)/K)((N+K)/K)$, 故 $(HN+K)/K \subseteq ((H+K)/K)((N+K)/K)$, 所以 $((H+K)/K)((N+K)/K) = (HN+K)/K$. 证毕.

由引理 3 ~ 4, 定理 3 ~ 6, 及大半环类 $\mathscr{S}$是代数正规类 可得.

定理 7 大半环类 $\mathscr{S}_{\mathscr{B}}$是完备代数正规类, 从而是可积代数正规类.

由定理 7知, 大半环类 $\mathscr{S}_{\mathscr{B}}$是完备代数正规类及可积代数正规类 也是一般代数正规类 故文献/2 ~ 9/中结论可作为代数正规类的特例而在大半环类 $\mathscr{S}_{\mathscr{B}}$ 中成立, 具有文献 [2 ~ 9] 中的性质, 即可建立Amitsur- Kurosh意义下的一般根理论.

参考文献:

[1] SZASZ F A. Radicals of rings[M]. New York Akademiai kiado, Budapest, 1981.

[2] PUCZYLOWSKI E R. On general theory of radicals[J]. Algebra Universalis, 1993, 30: 53- 60.

[3] 任艳丽, 王尧. 正规类中遗传根的一个性质[J]. 哈尔滨师范大学自然科学学报, 2001, 17(5): 39- 43.

[4] 王尧, 任艳丽. 一般代数对象的根与半单类[J]. 哈尔滨师范大学自然科学学报, 2002, 18(5): 22- 27.

[5] 任艳丽, 王尧. 代数正规类中的遗传根与强半单根[J]. 数学研究与评论, 2004, 24(4): 597- 602.

[6] 杨宗文. 代数正规类中的 δ-根[J]. 云南大学学报: 自然科学版, 2005, 27(5): 105- 108.

[7] 杨宗文. 代数正规类的上根(英)[J]. 云南大学学报: 自然科学版, 2006, 28(1): 8- 11.

[8] 杨宗文, 杨柱元. 完备代数正规类的根与右理想[J]. 昆明理工大学学报: 理工版, 2006, 31(3): 112- 116, 120.

[9] YANG Zong- wen, PAN Jiang- min. The supernilpotent radicals, special radicals and Bear radical in normal classes of product algebras[J]. Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 待发.

[10] 陈培慈. 半环理论与语言和自动机[M]. 南昌: 江西高校出版社, 1993.