

夹杂物问题应力场的数值计算

郭荣鑫¹, Gerard LORMAND², 李俊昌³

(1. 昆明理工大学 建筑工程学院, 云南 昆明 650224; 2. GEMPPM INSA de LYON, 69621 Villeurbanne Cedex, France; 3. 昆明理工大学 理学院, 云南 昆明 650093)

摘要: 等效夹杂物方法是细观力学中的一种重要方法, 文中编制的数值计算程序能在考虑多个夹杂物相互响应的情况下计算材料应力、应变场, 并实现了计算结果的三维显示. 计算结果与文献中的计算结果非常吻合. 本文编制的数值计算程序不仅可以用于研究复合材料的损伤演化及失效, 而且利用特殊构型的椭球空洞来模拟裂纹, 可以计算裂纹群的应力、应变场.

关键词: 夹杂物; 数值计算; 裂纹群; 损伤演化; 失效

中图分类号: O346.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-855X(2004)03-0051-05

Numerical Calculation of the Stress Field for the Inclusion Problem

GUO Rong-xin¹, Gerard LORMAND², LI Jun-chang³

(1. Faculty of Architectural Engineering, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650224, China; 2. GEMPPM, INSA de LYON, 69621 Villeurbanne Cedex, France; 3. Faculty of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, China)

Abstract: The equivalent inclusion method is one of the most important methods in the micro mechanics. The computer program dealing with the interaction among multi inclusions has been written and used to calculate the stress field as well as strain field of the material. The calculation results can be illustrated in three - dimensional figures. They coincide with the exact results and numerical computation results in the literatures very well. The numerical computation program can not only be used to study the damage evolution and failure of composite material, but also can be used to calculate the stress field and strain field of collective cracks by using the special ellipsoidal cavity to simulate the crack.

Key words: inclusion; numerical computation; collective cracks; damage evolution; failure

0 引言

众所周知,材料在制造、加工过程中以及构件在设计上都不可避免地存在诸多缺陷,如:微空洞、微裂纹、各类夹杂、擦伤、未焊透、应力集中等.工程材料本身也往往是含有许多成分的不均匀材料,如复合材料.对于这些从力学角度看已是不均匀的材料,其内部都会出现内应力.这就使材料存在这样一种现象:随着构件尺寸的增大,构件的强度(破坏时的应力)会下降,这就是所谓尺寸效应^[1].材料产生尺寸效应的原因之一便是大尺寸构件中的材料缺陷比小尺寸构件中的多.另外,对于复合材料来说,众多的研究结果表明复合材料的损伤演化一般都是从增强相与基体界面处开始的.由此可见,计算材料缺陷附近的应力、应变场对于研究材料的损伤演化及失效具有重要的意义.材料的这些缺陷或第二相也可称为夹杂物.对于夹杂物问题的开创性研究工作是由J. D. Eshelby完成的^[2,3].1957年,他首次提出由于夹杂物的存在而产生的对应力场的影响可通过设定夹杂物引起本征应变来模拟.这种等效办法被称为等效夹杂物方法.该方法是细观力学中提出较早、影响较大的一种方法.然而要获得夹杂物问题的解析解却是十分烦琐和困难的.本文就是基于J. D. Eshelby的等效夹杂物方法,利用傅立叶变换编制了能在考虑多个夹杂物相互响

收稿日期:2003-12-15. 基金项目:云南省教育厅科学研究基金资助项目(项目编号:14039011).

第一作者简介:郭荣鑫(1964~),男,硕士,副教授.主要研究方向:金属基复合材料的损伤、断裂. E-mail:guorx@kmust.edu.cn

应的情况下计算材料应力、应变场的数值计算程序. 考虑到程序的可移植性和完整性, 对所有公式均编写了相应的过程和函数. 该程序采用 Object Pascal 语言编写, 在 Delphi 7.0 中运行. 程序计算结果的显示, 对于某一方向的应力, 可由 Delphi 7.0 直接绘图, 对于某一平面的应力, 则用 Matlab 6.5 进行绘图.

1 夹杂物方法简介

本文所称的夹杂物是指在一个无限大各向同性均匀介质 D 中有一子域, 在未受外力作用的情况下该子域具有下列特殊情形之一: (1) 该子域的弹性模量与 D 域(基体)的相同, 但该子域上存在本征应变, (2) 该子域的弹性模量与 D 域(基体)的不同, (3) 该子域的弹性模量与 D 域(基体)的不同, 且该子域上存在本征应变 ϵ_{ij}^* . 为方便起见, 本文把这三种情形的子域均统称为夹杂物.

1.1 异性椭球夹杂物无外加应力作用时本征应变引起的应变场和应力场

夹杂物内部的点:

J. D. Eshelby 由格林公式

$$u_i(x) = G_{ij}(x - x') f_j \quad (1)$$

推出夹杂物内部的应变场和应力场分别为:

$$\epsilon_{ij}(x) = \frac{\epsilon_{mn}^*}{16(1-\nu)} \frac{ig_{jmn} + j_{imn}}{g} d = S_{ijkl} \epsilon_{kl}^* \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^*) = C_{ijkl} (S_{klmn} \epsilon_{mn}^* - \epsilon_{mn}^*) \quad (3)$$

式中 S_{ijkl} 被称为 Eshelby 张量, C_{ijkl} 为材料的弹性模量张量.

$$C_{ijkl} = \mu (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{kj}) \quad \mu = 2\mu\nu / (1 - 2\nu) \quad E = 2(1 + \nu)\mu$$

由于(2)式与坐标 x 无关, 因此, 夹杂物内部的应力、应变场是均匀的. 这是 Eshelby 提出的最有价值的结论.

夹杂物外部的点:

$$\epsilon_{ij}(x) = \frac{1}{8(1-\nu)} \left\{ \epsilon_{kl, kl} - 2\nu \epsilon_{kk, ij} - 2(1-\nu) (\epsilon_{ik, kj} + \epsilon_{jk, ki}) \right\} = D_{ijkl}(x) \epsilon_{kl}^* \quad (4)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}(x) = C_{ijkl} D_{klmn}(x) \epsilon_{mn}^* \quad (5)$$

式中:

$$8(1-\nu) D_{ijkl}(x) = \epsilon_{,klj}(x) - 2\nu \epsilon_{,kl, ij} - (1-\nu) [\epsilon_{,kj, il} + \epsilon_{,ki, jl} + \epsilon_{,lj, ik} + \epsilon_{,li, jk}]$$

$$\epsilon_{,ij}(x) = \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_k} \quad \epsilon_{,ij}(x) = \frac{1}{|x - x'|} d x$$

1.2 异性椭球夹杂物存在本征应变时在外加载荷作用下引起的应变场和应力场

这是最具普遍意义的夹杂物. 此时, 对应力的干扰就有两部分构成: 一部分是非均匀体的干扰, 另一部分是与非均匀体() 内的本征应变 ϵ_{ij}^* 相关的干扰.

$$\epsilon_{ij}^a + \epsilon_{ij} = C_{ijkl}^* (\epsilon_{kl}^a + \epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^*) \quad (6)$$

$$\epsilon_{ij}^a + \epsilon_{ij} = C_{ijkl} (\epsilon_{kl}^a + \epsilon_{kl}) \quad D - \quad (7)$$

如果用一个弹性模量张量与基体的弹性模量张量 C_{ijkl} 相同的夹杂物的本征应变来模拟非均匀体引起的应变变化. 则:

$$\epsilon_{ij}^a + \epsilon_{ij} = C_{ijkl} (\epsilon_{kl}^a + \epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^* - \epsilon_{kl}^*) \quad (8)$$

式中 C_{ijkl}^* 为夹杂物的弹性模量张量, C_{ijkl} 为基体的弹性模量张量.

式(6)与式(8)必须相等, 所以:

$$C_{ijkl}^* (\epsilon_{kl}^a + \epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^*) = C_{ijkl} (\epsilon_{kl}^a + \epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^* - \epsilon_{kl}^*) \quad (9)$$

这个方程被称为等效方程.

当外加载荷均匀时, 本征应变也是均匀的, 所以:

$$\epsilon_{kl} = S_{klmn} (\epsilon_{mn}^p + \epsilon_{mn}^*) = S_{klmn} \epsilon_{mn}^* \quad (10)$$

$$C_{ijkl}^* (\frac{a}{kl} + S_{klmn} \frac{**}{mn} - \frac{b}{kl}) = C_{ijkl} (\frac{a}{kl} + S_{klmn} \frac{**}{mn} - \frac{**}{kl}) \tag{11}$$

i_j^* 就可以由方程 (11) 确定, 然后也就可以求出非均匀夹杂物内外部的应力、应变场。

1.3 夹杂物问题的数值求解

J. D. Eshelby 解决了在均匀外载荷作用下无限大各向同性体中的椭圆夹杂物问题. 由于求取不同形状夹杂物问题的解析解十分困难, 因此 Moschovidis^[4] 将本征应变、外加载荷和由它们引起的应变场均用坐标的多项式来表示以使等效夹杂物方法用于夹杂物问题的数值计算. 将等效方程整理成如下形式:

$$C_{ijkl} \frac{kl}{(x)} - C_{ijkl}^* \frac{kl}{(x)} = - C_{ijkl} \frac{a}{kl}(x) \tag{12}$$

式中 $C_{ijkl} = C_{ijkl} - C_{ijkl}^*$, 并将本征应变、外加载荷和由它们引起的应变场均用坐标的多项式表示为:

$$i_j^*(x) = B_{ij} + B_{ijk}x_k + B_{ijkl}x_kx_l + \dots \tag{13}$$

$$ij(x) = D_{ijkl}(x) B_{kl} + D_{ijklq}(x) B_{klq} + D_{ijklqr}(x) B_{klqr} + \dots \tag{14}$$

$$i_j^*(x) = E_{ij} + E_{ijk}x_k + E_{ijkl}x_kx_l + \dots \tag{15}$$

式中 $E_{ij}, E_{ijk}, E_{ijkl} \dots$ 为常数.

将应变场 $i_j(x)$ 展开为坐标原点的泰勒级数:

$$mn[P] = mn[0] + mn,p[0]x_p^p + \frac{1}{2} mn,pq[0]x_p^p x_q^p + \dots \tag{16}$$

将方程 (14) 代入方程 (16) 得:

$$\begin{aligned} mn[P] = & D_{mnij}[0]B_{ij} + D_{mnijk}[0]B_{ijk} + D_{mnijkl}[0]B_{ijkl} + \dots \\ & + [D_{mnij,p}[0]B_{ij} + D_{mnijk,p}[0]B_{ijk} + D_{mnijkl,p}[0]B_{ijkl} + \dots] x_p^p \\ & + \frac{1}{2} [D_{mnij,pq}[0]B_{ij} + D_{mnijk,pq}[0]B_{ijk} + D_{mnijkl,pq}[0]B_{ijkl} + \dots] x_p^p x_q^p + \dots \end{aligned} \tag{17}$$

由等效方程的系数相等可得如下方程组:

$$\begin{cases} C_{stmn} [D_{mnij}[0]B_{ij} + D_{mnijk}[0]B_{ijk} + D_{mnijkl}[0]B_{ijkl} + \dots] - C_{stmn} B_{mn} = - C_{stmn} E_{mn} \\ C_{stmn} [D_{mnij,p}[0]B_{ij} + D_{mnijk,p}[0]B_{ijk} + D_{mnijkl,p}[0]B_{ijkl} + \dots] - C_{stmn} B_{mnp} = - C_{stmn} E_{mnp} \\ \frac{1}{2!} C_{stmn} [D_{mnij,pq}[0]B_{ij} + D_{mnijk,pq}[0]B_{ijk} + D_{mnijkl,pq}[0]B_{ijkl} + \dots] - C_{stmn} B_{mnpq} = - C_{stmn} E_{mnpq} \end{cases} \tag{18}$$

对于多个夹杂物来说, 由于每个夹杂物有一个坐标系, 夹杂物之间存在相互影响, 因此, 在计算中要进行坐标变换并考虑夹杂物间的相互影响. 另外, 由于夹杂物之间存在相互影响, 因此, 对于多夹杂物问题来说夹杂物内部的应力、应变场不再是均匀的.

以两个夹杂物时夹杂物 α 对夹杂物 β 的影响为例:

$$C_{stmn}^I \left\{ [D_{mnij}^I[0]B_{ij}^I + D_{mnijk}^I[0]B_{ijk}^I + D_{mnijkl}^I[0]B_{ijkl}^I + \dots] + a_{mc} a_{nh} [D_{chij}^{II}[0]B_{ij}^{II} + D_{chijk}^{II}[0]B_{ijk}^{II} + D_{chijkl}^{II}[0]B_{ijkl}^{II} + \dots] \right\} - C_{stmn}^I B_{mn}^I = - C_{stmn}^I E_{mn} \tag{19}$$

$$C_{stmn}^I \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x_p} D_{mnij}^I[0]B_{ij}^I + \frac{\partial}{\partial x_p} D_{mnijk}^I[0]B_{ijk}^I + \frac{\partial}{\partial x_p} D_{mnijkl}^I[0]B_{ijkl}^I + \dots \right] + a_{mc} a_{nh} a_{pf} \right. \\ \left. \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x_f} D_{chij}^{II}[0]B_{ij}^{II} + \frac{\partial}{\partial x_f} D_{chijk}^{II}[0]B_{ijk}^{II} + \frac{\partial}{\partial x_f} D_{chijkl}^{II}[0]B_{ijkl}^{II} + \dots \right] \right\} - C_{stmn}^I B_{mnp}^I = - C_{stmn}^I E_{mnp} \tag{20}$$

$$\frac{1}{2!} C_{stmn}^I \left\{ \left[\frac{\partial^2}{\partial x_p \partial x_q} D_{mnij}^I[0]B_{ij}^I + \frac{\partial^2}{\partial x_p \partial x_q} D_{mnijk}^I[0]B_{ijk}^I + \frac{\partial^2}{\partial x_p \partial x_q} D_{mnijkl}^I[0]B_{ijkl}^I + \dots \right] + a_{mc} a_{nh} a_{pf} a_{qg} \right. \\ \left. \cdot \left[\frac{\partial^2}{\partial x_f \partial x_g} D_{chij}^{II}[0]B_{ij}^{II} + \frac{\partial^2}{\partial x_f \partial x_g} D_{chijk}^{II}[0]B_{ijk}^{II} + \frac{\partial^2}{\partial x_f \partial x_g} D_{chijkl}^{II}[0]B_{ijkl}^{II} + \dots \right] \right\} - C_{stmn}^I B_{mnpq}^I = - C_{stmn}^I E_{mnpq} \tag{21}$$

方程组中的 a_{ij} 为坐标变换矩阵.

要指出的是等效本征应变多项式的阶次应等于或高于外加应变多项式的阶次, 而且多项式的阶次越高, 所获得的解也就越精确.

2 数值计算

2.1 与文献中计算结果的比较

本文所编制的程序的计算结果与 Moschovidis^[4]的计算结果(该文中图3~图7,图37~图43以及图48~图49)进行了比较.除了该文中图38(a)与图38(b)外,我们的计算结果与 Moscho-

表1 3种方法的计算结果比较

	A点			C点			C点		
	11	22	33	11	22	33	11	22	33
Sternberg 和 Sadowsky	0.0	1500	1470	1510	1510	0.0	1570	1570	0.0
Moschovidis	1.0	1507.9	1467.6	1503	1503	-0.8	1549.5	1549.5	-6
本文计算结果	26.9	1494.3	1460.1	1488.2	1488.2	12.1	1546.8	1546.8	26.9

vidis 的计算结果非常吻合.其中该文中图38(a)显然将应力的类型标错,而图38(b)我们认为是错误的.本文针对无限大体中两个球形空洞的计算结果与 Sternberg 和 Sadowsky^[5]的精确解进行了比较(无限大体中两个间距为4.0,半径为1的球形空洞,球心位置分别位于(0,0,0)和(0,0,4)两点,基体的弹性模量为207.6 GPa,泊松比为0.25, x, y, z 三个方向的外加载荷均为1000 Pa的拉应力)(见表1),此外,针对无限大体中单个球形空洞的计算结果还与 Arnaud Riccardi's^[6]的计算结果(该文中图16和图18)进行了比较.本文所编制的程序的计算结果与他们的计算结果也非常吻合.这初步说明本文所编制的程序是合理可靠的.限于篇幅,本文只分别给出与 Moschovidis 论文中38(a)与图38(b)的情形(无限大体中两个间距为2.5,半径为1的球形空洞,球心位置分别位于(0,0,0)和(0,0,2.5)两点,基体的弹性模量为207.6 GPa,泊松比为0.3,外加载荷为沿 z 方向的1000 Pa的单向拉应力)对应的计算结果(见图1和图2).

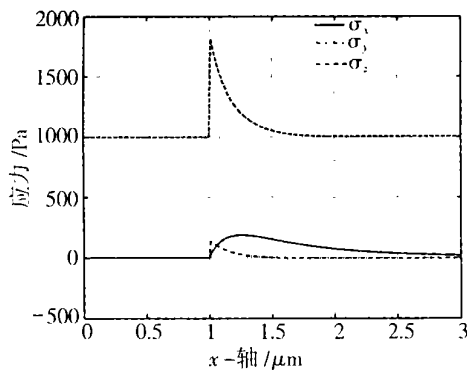


图1 沿 x 轴的应力分布

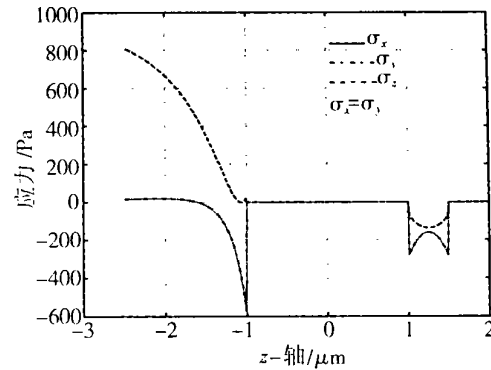


图2 沿 z 轴的应力分布

2.2 其它夹杂物计算结果及其三维显示

图3~图6分别给出无限大体中单个椭球空洞的计算结果.该椭球的球心位于坐标原点,三个半轴及其方位分别为1.0(沿 x 轴),0.5(沿 y 轴)和0.125(沿 z 轴).基体的弹性模量为207.6 GPa,泊松比为0.3,外加载荷为沿 z 方向的1000 Pa的单向拉应力.由上图可见,与球形空洞相比,椭球空洞边缘的应力显著增大.通过对其它构型的椭球空洞的计算我们还发现,在椭球体半长轴和半中轴保持不变的情况下,如果半短轴的长度减小到原来的1/10,则椭球空洞边缘的应力将增大到原来的10倍左右.当半短轴很小时,椭球空洞边缘的计算应力值达到外加应力的数十倍,明显超过材料的理论强度值.由此可见,在裂纹(用半短轴非常小的椭球空洞来模拟)尖端的应力场存在着奇异性.

3 讨论

通过本文所编制的程序的计算结果与我们目前查到的多篇文献中的计算结果的比较,初步说明本文所编制的程序是合理可靠的.由于该程序可以用于计算材料中存在若干夹杂物区域的应力、应变场,因此,将该程序用于静载作用下材料的损伤演化分析是可行的.目前,我们正在结合激光全息和数字散斑实验,分析研究准脆性材料中裂纹间的相互影响以及准脆性材料的失效机理.当然,由于该程序中没有考虑交变载荷和温度场对材料损伤演化的影响以及微裂纹群对材料的增韧效应和微裂纹群引起的材料弹性模量改

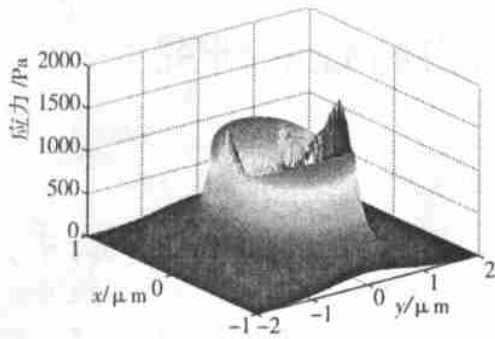


图3 xoy面上沿x方向的应力分布

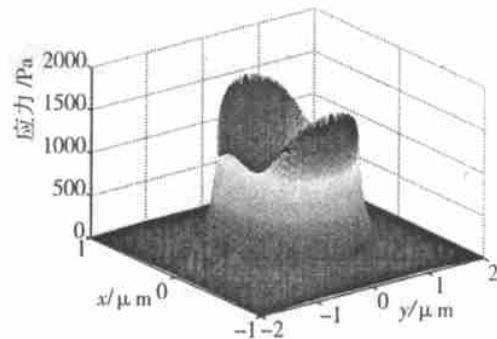


图4 xoy面上沿y方向的应力分布

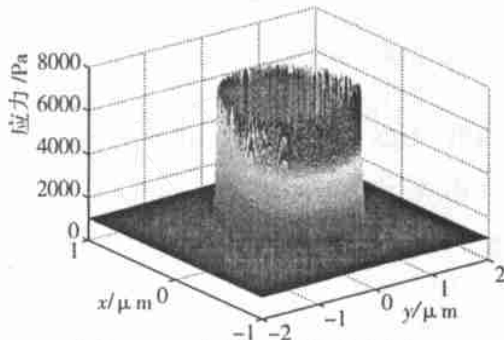


图5 xoy面上沿z方向的应力分布

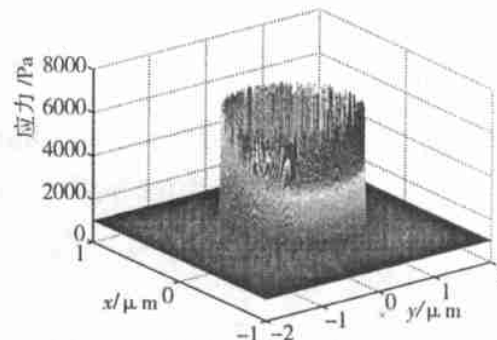


图6 xoy面上的 Von Mises 等效应力分布

变,从而影响了该程序在这些领域的应用.此外,在模拟裂纹进行计算时,应力的分布出现不连续性.这些都是需要对本文所编程序进行改进的地方.

参考文献:

- [1] Hertzberg R W. 工程材料的变形与断裂[M]. 王克仁, 罗力更, 等译. 北京: 机械工业出版社, 1982. 260 ~ 262.
- [2] Eshelby J D. The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal inclusion and Related Problems[J]. Proc. Roy. Soc. 1957, A241, 376 ~ 396.
- [3] Eshelby J D. The Elastic Field Outside an Ellipsoidal Inclusion[J]. Proc. Roy. Soc. 1959. A252, 561 ~ 569.
- [4] Zisis A. Moschovidis. Two Ellipsoidal Inhomogeneities and Related Problems Treated by the Equivalent Inclusion Method [M]. Northwestern University, Ph.D. Dissertation, 1975. 15 ~ 114.
- [5] Sternberg E, Sadowsky M A. On the Axisymmetric Problem of the Theory of Elasticity for an Infinite Region Containing Two Spherical Cavities[J]. J. Appl. Mech. 1952, 19:19 ~ 27.
- [6] Arnaud Riccardi. Theoretic Study on the Nonclassical Inclusion Configuration in the Linear Elastic Isotrope[M]. National Polytechnic Institute of Grenoble. Dissertation for the Ph.D. 1998. 75 ~ 77.