第 35卷 第 1期 昆明理工大学学报 (理工版) http://www.kustjournal.com/ Vol.35 No.1
2010年 2月 Journal of Kunming University of Science and Technology (Science and Technology) Feb. 2010

doi:10.3969/j.issn.1007-855x.2010.01.022

子流形的关于第 2基本形式泛函的变分极值条件的应用

张家玲
(昆明理工大学 理学院,云南 昆明 650093)

摘要: 在子流形的关于第 2基本形式泛函的变分的极值条件中, 运用 Green公式和文献 [3]的结果, 得到了第 2基本形式平行的结果. 并找到了满足该极值条件的 W - 极小子流形的例子.

关键词: 极小子流形; 变分; 第 2基本形式
中图分类号: O177 文献标识码: A 文章编号: 1007-855X(2010)01-0109-04

Application of Variation Extremal Condition in Second Fundamental Form of Submanifold

ZHANG Jia-ling
(Faculty of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, China)

Abstract: In this paper, the Green formula is applied to obtain the result that the second fundamental form is parallel, which arises from the extremal condition of the variation in second fundamental form of submanifold. The forms of W-minimal submanifold satisfying the conditions are also listed.

Key words: minimal submanifold; variation; second fundamental form

0 引 言

微分几何中对各类泛函的研究一直是数学工作者所感兴趣的. 早期的数学家如 G. Thomsen对超曲面关于第一平均曲率泛函的研究[7], 发现了它是共形变换下的不变量, 并通过变分处理后找到了相应的极值条件. 由此引发人们对超曲面的更一般的泛函进行研究, 得到了许多重要结果[8], 后来的数学工作者又将这类思想推广到子流形上, 对子流形的各种泛函进行研究, 例如我们已经知道体积泛函是在具有固定边界的变分下达到极值的子流形[4]. 近年来在子流形的关于第 2基本形式泛函的变分研究中, 从极值条件中定义出了一类新的极值子流形 —— W - 极小子流形.

论文从 W - 极小子流形满足的条件出发, 推导出第 2基本形式平行的结果, 并分析满足一定条件的 W - 极小子流形的形状.

1 定理

设 n维黎曼流形 M 等距浸入到 $n+p$维黎曼流形 N 中, 在 N 上选取局部单位正交切标架场 $e_1, \cdots, e_{n+p}$ 使得当它们限制在 M 上时, 向量 $e_1, \cdots, e_n$ 与 M 相切, $e_{n+1}, \cdots, e_{n+p}$ 与 M 垂直, 并且令 $\omega^1, \cdots, \omega^{n+p}$ 为 $e_1, \cdots, e_{n+p}$ 的对偶标架. 我们约定 $1 \leqslant A, B, C, \cdots \leqslant n+p$; $1 \leqslant i, j, k, \cdots \leqslant n$; $n+1 \leqslant \alpha, \beta, \gamma, \cdots \leqslant n+p$ 并且上下相同指标在所属范围内求和.

我们已经知道 $B = \sum_{\alpha ij} (h_{ij}^{\alpha})^2$ 为 M 的第 2基本形式的模长平方[4], $H = \dfrac{1}{n}\sum_{\alpha i} h_{ii}^{\alpha} e_{\alpha}$ 为 M 的平均曲率

收稿日期: 2008-10-08.
作者简介: 张家玲 (1981-)女, 硕士, 助教, 主要研究方向: 微分几何. **E-mail**: zh_jb6@sina.com

向量，$|H|^2$为M的平均曲率，平均曲率向量为0的子流形我们称为极小子流形. 设$I=(-\varepsilon,\varepsilon)(\varepsilon>0)$，$F:M\times I\to N$为光滑映射，对于每个固定的$t\in I$，$f_t=F_{M\times\{t\}}$是$M_t$到$N$的光滑浸入映射，如果$t=0$，$f_0=f:M\to N$，则称$\{f_t\}$是$f$的一个变分，$\upsilon=\frac{\partial f_t}{\partial t}|_{t=0}$称为$f$的变分向量场，特别地，如果对于带边流形$M$有$f_t|\partial M=f|\partial M$，并且在$\partial M$上$df_t(TM)=df(TM)$，则称$\{f_t\}$是$f$的允许法变分.

泛函$W(M)=\int_M\|B\|^n dM$测量了M与全测地子流形的差异(文献[4]).

为了求出泛函$W(M)=\int_M\|B\|^n dM$的变分公式$\frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}W(M)$，必须先解决$\frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}(\|B\|^n)$和$\frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}dM_t$. 根据结构方程我们可以得到，对于每个固定的$t$，$f_t(M)$的体积元为：

$$dM_t=\omega^1(t)\wedge\cdots\wedge\omega^n(t) \tag{1}$$

(其中$\omega^1(t),\cdots,\omega^{n+p}(t)$为子流形$M_t$的切标架场$e_1(t),\cdots,e_{n+p}(t)$的对偶标架场)

取变分向量场为$\upsilon=\frac{\partial f_t}{\partial t}=a^\alpha e_\alpha$，所以(参考文献[1])

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0}dM_t&=\sum_i\omega^1(t)\wedge\cdots\wedge d\omega^i(t)\wedge\cdots\wedge\omega^n(t)|_{t=0}=\\&-\sum_{\alpha i}a^\alpha h^\alpha_{ii}\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^n=\\&-na^\alpha H^\alpha dM\end{aligned} \tag{2}$$

$$\sum_{\alpha ij}h^\alpha_{ij}\frac{\partial h^\alpha_{ij}}{\partial t}=\sum_{\alpha ij}h^\alpha_{ij}a^\alpha_{,ij}+\sum_{\alpha\beta ijk}h^\alpha_{ij}h^\alpha_{ik}h^\beta_{kj}a^\beta+\sum_{\alpha\beta ij}h^\alpha_{ij}K^\alpha_{i\beta j}a^\beta \tag{3}$$

(其中$a^\alpha_{,ij}$为a^α的二阶协变导数，$K^\alpha_{i\beta j}$为N的(0，4)型曲率张量场的分量)

由于$\|B\|^n=(\|B\|^2)^{\frac{n}{2}}$，所以

$$\frac{\partial}{\partial t}(\|B\|^n)=n\|B\|^{n-2}\sum_{\alpha ij}h^\alpha_{ij}\frac{\partial h^\alpha_{ij}}{\partial t} \tag{4}$$

将(3)式代入式(4)我们可以得到：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\|B\|^n)=n\|B\|^{n-2}\Big[\sum_{\alpha ij}h^\alpha_{ij}a^\alpha_{ij}+\sum_{\alpha\beta ijk}h^\alpha_{ij}h^\alpha_{ik}h^\beta_{kj}a^\beta+\sum_{\alpha\beta ij}h^\alpha_{ij}K^\alpha_{i\beta j}a^\beta\Big] \tag{5}$$

下面我们就计算泛函$W(M)$的变分：

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0}\int_M\|B\|^n dM=\int_M\Big[\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0}(\|B\|^n)dM+\|B\|^n\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0}dM_t\Big] \tag{6}$$

将公(2)式和式(5)代入式(6)，并根据Stokes公式，可以得到

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0}\int_M\|B\|^n dM=n\int_M\sum_\beta\Big\{&\|B\|^{n-2}\Big[\sum_{\alpha ijk}h^\alpha_{ik}h^\alpha_{kj}h^\beta_{ij}+\sum_{\alpha ij}h^\alpha_{ij}K^\alpha_{i\beta j}-\|B\|^2H^\beta+n\Delta H^\beta+\\&\sum_{ij}(\|B\|^{n-2})_{,ij}h^\beta_{ij}+2n\sum_i H^\beta_{,i}(\|B\|^{n-2})_{,i}\Big\}a^\beta dM\end{aligned} \tag{7}$$

(其中Δ为Laplace算子)

因此，对于任意的容许法变分，$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0}W(M)=0$当且仅当下式成立：

$$\|B\|^{n-2}\Big[\sum_{\alpha ijk}h^\alpha_{ik}h^\alpha_{kj}h^\beta_{ij}+\sum_{\alpha ij}h^\alpha_{ij}K^\alpha_{i\beta j}-\|B\|^2H^\beta+n\Delta H^\beta\Big]+\sum_{ij}(\|B\|^{n-2})_{,ij}h^\beta_{ij}+2n\sum_i H^\beta_{,i}(\|B\|^{n-2})_{,i}=0 \tag{8}$$

我们称满足(8)式的子流形为W-极小子流形.

对于常曲率空间N，将$K^\alpha_{i\beta j}=c\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}$(其中$c$为$N$的截曲率，$\delta_{ij}$为Kronecker符号)分别代入(7)式和(8)式可以得到：

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}W(M) = n\int_M\sum_\beta\{\sum_{ij}(\|B\|^{n-2}h_{ij}^\beta)_{,ij} + \|B\|^{n-2}[\sum_{\alpha ijk}h_{ik}^\alpha h_{kj}^\alpha h_{ij}^\beta + (nc-\|B\|^2)H^\beta]\}a^\beta dM \quad (9)$$

$$\sum_{ij}[(\|B\|^{n-2})h_{ij}^\beta]_{,ij} + \|B\|^{n-2}[\sum_{\alpha ijk}h_{ik}^\alpha h_{kj}^\beta h_{ij}^\beta + (nc-\|B\|^2)H^\beta] = 0 \quad (10)$$

引理　n维黎曼流形M为$n+p$维黎曼流形N中的紧致子流形, 则

$$\int_M\|B\|^{n-2}\Delta\|B\|^2 \leqslant 0 \quad (11)$$

证明　根据 Green公式,

$$0 = \int_M\Delta\|B\|^n dM = \int_M\|B\|^{n-2}\Delta\|B\|^2 dM + \int_M<\nabla\|B\|^{n-2}, \nabla\|B\|^2> dM$$

又由于 $\int_M<\nabla\|B\|^{n-2}, \nabla\|B\|^2> dM = \frac{n-2}{2}\int_M(\nabla\|B\|^2)^2 dM$

所以 $\int_M\|B\|^{n-2}\Delta\|B\|^2 dM = -\frac{n-2}{2}\int_M(\nabla\|B\|^2)^2 dM \leqslant 0$

定理　若n维黎曼流形M为$n+p$维具常截曲率c的黎曼流形N中的紧致$W-$极小子流形, 则有

$$\int_M\|B\|^{n-2}\{[nc-(2-\frac{1}{p})\|B\|^2-n|H|^2]\|B\|^2-2cn^2|H|^2\}dM \leqslant 0 \quad (12)$$

等号成立当且仅当 $\nabla B = 0$, 即第 2基本形式平行.

证明　设变分向量场 $\upsilon = a^\alpha e_\alpha = H^\alpha e_\alpha$, 由于$M$为$W-$极小子流形, 根据(9)式, 我们可以得到:

$$\begin{aligned}
0 &= n\int_M\sum_\beta\{\sum_{ij}(\|B\|^{n-2}h_{ij}^\beta)_{,ij} + \|B\|^{n-2}[\sum_{\alpha ijk}h_{ik}^\alpha h_{kj}^\alpha h_{ij}^\beta + (nc-\|B\|^2)H^\beta]\}H^\beta dM = \\
&n\int_M\|B\|^{n-2}[\sum_{\beta ij}h_{ij}^\beta H^\beta_{,ij} + \sum_{\alpha\beta ijk}h_{ik}^\alpha h_{kj}^\alpha h_{ij}^\beta H^\beta + (nc-\|B\|^2)|H|^2]dM = \\
&n\int_M\|B\|^{n-2}[\frac{1}{n}\sum_{\beta ijk}h_{ij}^\beta h_{kk,ij}^\beta + \sum_{\alpha\beta ijk}h_{ik}^\alpha h_{kj}^\alpha h_{ij}^\beta H^\beta + (nc-\|B\|^2)|H|^2]dM = \\
&\int_M\|B\|^{n-2}[\sum_{\beta ijk}h_{ij}^\beta(h_{ijkk}^\beta + \sum_l h_{il}^\beta R_{kkj}^l + \sum_l h_{kl}^\beta R_{ikj}^l - \sum_\alpha h_{ik}^\alpha R_{\alpha kj}^\beta) + n\sum_{\alpha\beta ijk}h_{ik}^\alpha h_{kj}^\alpha h_{ij}^\beta H^\beta + \\
&n(nc-\|B\|^2)|H|^2]dM = \\
&\int_M\|B\|^{n-2}[\sum_{\beta ijkl}h_{ij}^\beta h_{il}^\beta R_{kkj}^l + \sum_{\beta ijkl}h_{ij}^\beta h_{kl}^\beta R_{ikj}^l - \sum_{\alpha\beta ijk}h_{ij}^\beta h_{ik}^\alpha R_{\alpha kj}^\beta + \frac{1}{2}\Delta\|B\|^2 - \|\nabla B\|^2 + \\
&n\sum_{\alpha\beta ijk}h_{ik}^\alpha h_{kj}^\alpha h_{ij}^\beta H^\beta + n(nc-\|B\|^2)|H|^2]dM
\end{aligned}$$

利用引理并且将 $R_{jkl}^i = c\delta_{jk}\delta_{il} + \sum_\alpha(h_{jk}^\alpha h_{il}^\alpha - h_{jl}^\alpha h_{ik}^\alpha)$和 $R_{\alpha kj}^\beta = \sum_i(h_{ik}^\beta h_{ij}^\alpha - h_{ij}^\beta h_{ik}^\alpha)$(文献[4])代入上式进行化简可以得到:

$$\begin{aligned}
0 \geqslant &\int_M\|B\|^{n-2}[\|\nabla B\|^2 + cn\|B\|^2 - 2cn^2|H|^2 + n\|B\|^2|H|^2 - 2\sum_{\alpha\beta}\mathrm{tr}(H^\alpha)^2(H^\beta)^2 + \\
&\sum_{\alpha\beta}(\mathrm{tr}(H^\alpha H^\beta))^2]dM = \\
&\int_M\|B\|^{n-2}\{\|\nabla B\|^2 + cn\|B\|^2 - 2cn^2|H|^2 + n\|B\|^2|H|^2 - [\sum_{\alpha\beta}\mathrm{tr}(H^\alpha H^\beta - H^\beta H^\alpha)\cdot \\
&(H^\beta H^\alpha - H^\alpha H^\beta) + \sum_{\alpha\beta}(\mathrm{tr}(H^\alpha H^\beta))^2]\}dM
\end{aligned} \quad (13)$$

由于[3]

$$\sum_{\alpha\beta}\mathrm{tr}(H^\alpha H^\beta - H^\beta H^\alpha)(H^\beta H^\alpha - H^\alpha H^\beta) + \sum_{\alpha\beta}(\mathrm{tr}(H^\alpha H^\beta))^2 \leqslant (2-\frac{1}{p})(\sum_\alpha\mathrm{tr}(H^\alpha)^2)^2 \quad (14)$$

将(14)式代入(13)式, 得到:

$$0 \geqslant \int_M\|B\|^{n-2}\{\|\nabla B\|^2 + [nc-((2-\frac{1}{p})\|B\|^2 - n|H|^2)]\|B\|^2 - 2cn^2|H|^2\}dM$$

$$\geqslant \int_M \|B\|^{n-2}\{[nc-((2-\frac{1}{p})\|B\|^2-n|H|^2)]\|B\|^2-2cn^2|H|^2\}dM$$

若

$$\int_M \|B\|^{n-2}\{[nc-((2-\frac{1}{p})\|B\|^2-n|H|^2)]\|B\|^2-2cn^2|H|^2\}dM=0 \quad (15)$$

则上面的所有等号都成立, 因此 $\nabla B=0$

推论 1 若 $n=2$, 且 M 是 N 中的极小子流形(也是 W - 极小的), 则有

$$0\geqslant \int_M [nc-(2-\frac{1}{p})\|B\|^2]\|B\|^2 dM$$

即 J. Simons不等式[1].

$c>0$时, $\|B\|^2\leqslant \frac{2c}{2-\frac{1}{p}}$; 根据文献[1], 得到: 1) $\|B\|^2=0$(即M是全测地的)或 2) $p=1$时, $\|B\|^2=\frac{2c}{2-\frac{1}{p}}$, $M=S^1(\frac{1}{\sqrt{2}})\times S^1(\frac{1}{\sqrt{2}})$; $p\geqslant 2$时, M 是 Veronese曲面.

推论 2 n维黎曼流形M 为 $n+p$ 维单位球 S^{n+p} 中的紧致 W - 极小子流形, 若

$$[nc-(2-\frac{1}{p})\|B\|^2+n|H|^2]\|B\|^2-2cn^2|H|^2\geqslant 0$$

则 $\|B\|=0$或$[nc-(2-\frac{1}{p})\|B\|^2-n|H|^2]\|B\|^2-2cn^2|H|^2=0$且有下列 2种情况:

1) $p=1$, $M=S^k(a)\times S^{n-k}(b)$

(其中 $a^2+b^2=1$, $a=\sqrt{\frac{2}{3n}(n^2+5nk-5k^2)^{\frac{1}{2}}\cos(\frac{\theta}{3}+\frac{4\pi}{3})+\frac{n+k}{3n}}$, $\cos\theta=\frac{(n-2k)^3}{\sqrt{(-5k^2+5nk+n^2)^3}}$)

2) $p=2$, 且 $n=2$, 则$H^1=\lambda\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $H^2=\mu\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$由公式(15)及文献[3]

可知结论显然).

2 结束语

文中给出了满足一定条件的W - 极小子流形的例子. 构造一个新的W - 极小子流形的例子是一件不容易的工作, 对于超曲面的情形已经有了一些比较好的结果, 但是对于高余维的子流形, 构造新的例子还需要进一步的研究.

参考文献:

[1] Chern S S, Do Carmo M, Kobayashi S. Minimal Submanifolds of a Sphere with Second Fundamental form of Constant Length [J]. Functional Analysis and Related Fields: Springer-Verlag Berlin, 1970: 59-75.

[2] Reilly R C. Variational Prorerties of the Mean Curvature for Hypersurfaces in Space Forms[J]. Differ. Geom, 1973, (8): 465-477.

[3] Guo Z. Willmore Submanifolds in the Unit Sphere[J]. Collect. Math, 2004, (3): 279-287.

[4] 陈维桓, 李兴校. 黎曼几何引论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2002.

[5] Chen B Y. Some Conformal Invariants of Submanifolds and Their Application[J]. Boll V n Mat Ital, 1974: 380-385.

[6] Wang C. Mobius Geometry of Submanifolds in S^n [J]. Manuscripta Math, 1998: 517-534.

[7] Thomsen G. Vber Konforme Geometrie, I: Grundlagen der Konformen Flachentheorie, Abh[J]. Math, Sem, Hamburg, 1923, (3), 31-56.

[8] Chen B Y. An Invariant of Conforma Mappings[J]. Droc Amer Math Soc, 1973, (40): 563-564.