

工字形截面楔形单元弹性稳定单元刚度矩阵的推导与探讨

王俊平, 陈进, 罗小青, 梁怀庆
(昆明理工大学 建筑工程学院, 云南 昆明 650224)

摘要: 推导了工字形截面薄壁楔形构件的稳定计算中的单元刚度矩阵, 通过分析对比得出在楔形构件的稳定计算中, 如果是弯扭失稳, 则必须采用楔形单元矩阵. 本文推导出的楔形杆件在任意荷载下的弹性稳定单元刚度矩阵, 可用其直接形成总刚度矩阵, 解算楔形杆的稳定问题.

关键词: 楔形构件; 稳定; 单元刚度矩阵

中图分类号: TU311.2 文献标识码: A 文章编号: 1007-855X(2003)01-0117-06

Element Stiffness Matrix of Elastic Stability for I-Tapered Element

WANG Jun-ping, CHEN Jin, LUO Xiao-qing, LIANG Huai-qing

(Faculty of Architectural Engineering, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650224, China)

Abstract: Element stiffness matrix which is applied in stability calculation of I-section thin-wall tapered member is deduced. By analysis and contrast, the conclusion is obtained: in the stability calculation of tapered member, if the buckling is the lateral-torsional buckling, it must use the tapered element matrix to solve the stability problem.

Key words: tapered element; stability; element stiffness matrix

1 问题的提出

焊接工字形截面楔形钢构件由于制作简单, 受力合理, 外形轻巧美观, 在工程中应用日益广泛, 例如轻形门式刚架及悬挑结构中都常用到楔形构件(图1). 楔形构件的截面几何特性沿杆长不断变化, 其稳定计算较为困难. 计算楔形钢构件稳定承载力的有效数值方法是有限元法, 用这种方法可以考虑构件的初始缺陷的影响, 如: 残余应力、初弯曲、初扭转及材料的弹塑性等. 采用有限元法必须首先建立单元的弹性刚度矩阵. 因此, 建立正确的单元弹性刚度矩阵是有限元法的基础. 有限元法计算等截面杆稳定在文献[1]中有较详细的论述. 用有限元法计算楔形杆的稳定, 目前国内外学者研究得也很多, 但所有研究均将楔形单元近似以等截面单元来代替(图2). 文献[2]直接建立楔形梁在两端弯矩作用下的平衡微分方程, 用伽辽金法求解得到临界弯矩值. 经过对比, 我们发现, 当楔形杆的锥度较小时, 采用等截面单元代替楔形单元误差较小, 但如果楔形杆的锥度较大(即大、小端截面高度相差较大)时, 对于弯扭失稳, 无论单元如何划分, 采用等截面单元都将产生较大误差. 这是由于楔形单元中上、下翼缘绕腹板的弯矩将产生一个附加抵抗扭矩 M_3 , 此项的存在将有利于楔形杆的抗扭性能. 本文从楔形杆的总势能出发, 在总势能中引入附加抵抗扭矩

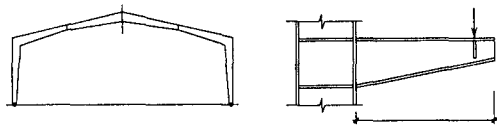


图1 门式刚架及牛腿简图

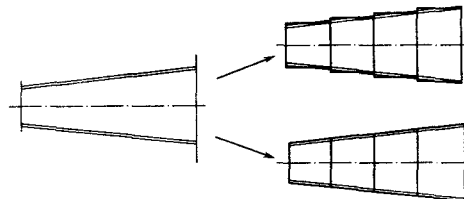


图2 两种形式的单元

收稿日期: 2002-07-11.

第一作者简介: 王俊平(1963-), 男, 硕士, 副教授; 主要研究方向: 钢结构.

M_3 产生的势能,由最小势能原理得到楔形杆在任意荷载下的单元刚度矩阵.

2 楔形杆件的平衡微分方程

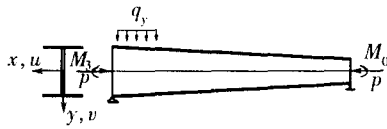


图3 楔形杆边界条件及一般受荷情况

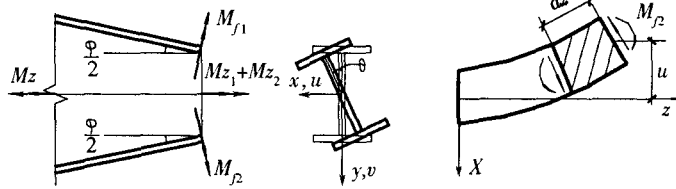


图4 楔形单元模型

楔形杆如图4所示,当其失稳时,将产生 X 方向位移 u , y 方向位移 V 及绕 Z 轴转 θ 角,相应得弯矩 M_y, M_x ,与等截面杆形式相同.即

$$M_y = -EI_y u'' \tag{1}$$

$$M_x = -EI_x v'' \tag{2}$$

对于等截面杆,扭转平衡方程为:

$$M_z = M_{z1} + M_{z2} = GI_t \frac{d\theta}{dz} - EI_\omega \frac{d^3\theta}{dz^3} \tag{3}$$

(3)式右端第一项为自由扭转产生的扭矩,第二项为翘曲扭矩.

工字形截面楔形杆件在发生沿杆纵轴的扭转时,见图4,由于上、下翼缘不平行,形成一个夹角 $\varphi = \frac{dh}{dz}$, h 为上、下翼缘间距,上、下翼缘绕腹板的弯矩分别为 M_{f1}, M_{f2} .二者沿 Z 轴方向的分量将产生一个沿杆轴线上的扭矩:

$$M_{z3} = M_{f1} \cdot \frac{1}{2}\varphi + M_{f2} \cdot \frac{1}{2}\varphi = \frac{\varphi}{2}(M_{f1} + M_{f2}) \tag{4}$$

以下翼缘 M_{f2} 为例

$$M_{f2} = EI_f \frac{d^2 u_f}{dz^2} = EI_f \frac{d^2(\frac{h}{2}\theta)}{dz^2} = M_{f1} \tag{5}$$

所以:

$$M_{z3} = \frac{\varphi}{2} \cdot 2M_{f2} = \frac{1}{2}EI_f\varphi \frac{d^2(h\theta)}{dz^2} \tag{6}$$

因此楔形杆扭转时截面扭矩为

$$M_z = GI_t \frac{d\theta}{dz} - \frac{h^2}{2}EI_f \frac{d^3\theta}{dz^3} + \frac{1}{2}EI_f\varphi \frac{d^2(h\theta)}{dz^2} \tag{7}$$

式中 I_f 为一个翼缘对腹板轴的惯性矩,右端第三项为等截面杆所缺少的.由式(7)可以看出,当仅为弯曲失稳时,用等截面单元代替楔形单元是可行的,但是为弯扭失稳时,若采用等截面单元,由于缺少 M_{z3} 项,即 $\frac{1}{2}EI_f\varphi \frac{d^2}{dz^2}(h\theta)$, 则当锥度较大时,将使计算结果产生较大的误差.

3 工字形截面楔形单元刚度矩阵

3.1 工字形等截面单元刚度矩阵

对称工字形等截面单元在任意荷载作用下,考虑几何非线性因素后的总势能表达式为^[1]:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_0^l (EI_y u''^2 + EI_x v''^2 + EI_\omega \theta''^2 + GI_t \theta'^2 - Pu'^2 - Pv'^2 - 2M_x u' \theta' + 2M_y v' \theta' - 2Q_x u' \theta' \\ & + 2Q_y v' \theta' - 2q_x u - 2q_y v - 2m\theta + q_x a_x \theta^2 + q_y a_y \theta^2) dz + \frac{1}{2} (-2Q_x u - 2Q_y v - 2M_x \theta \\ & + 2M_y u' + 2M_x v' + P_x b_x \theta^2 + P_y b_y \theta^2) \Big|_0^l \end{aligned} \tag{8}$$

式中: l 为单元长度; u, v, θ 分别为沿 x, y 方向的线位移及绕 z 轴的转角位移; 线分布荷载 q_x, q_y 作用于 x, y 轴的位置是 a_x, a_y ; m 为绕 z 轴的均布扭矩; 单元杆端部横向集中力 P_x, P_y 在 x, y 轴的作用位置是 b_x, b_y .

采用下列位移函数:

边界条件:

$$\begin{aligned} u &= a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 = \{z\}^t \{a\} & z = 0: & u = u_i, u' = u_i', & z = l: & u = u_j, u' = u_j' \\ v &= b_0 + b_1z + b_2z^2 + b_3z^3 = \{z\}^t \{b\} & & v = v_i, v' = v_i' & & v = v_j, v' = v_j' \\ \theta &= c_0 + c_1z + c_2z^2 + c_3z^3 = \{z\}^t \{c\} & & \theta = \theta_i, \theta' = \theta_i' & & \theta = \theta_j, \theta' = \theta_j' \end{aligned}$$

将以上各位移函数代入总势能方程, 并根据势能最小值原理分别对各位移求导并等于零后得等截面单元杆平衡方程:

$$\{[K_{fe}] + [K_{Ge}]\} \{\Delta_e\} = \{F_e\} \tag{9}$$

(9) 式中 $\{[K_{fe}] + [K_{Ge}]\}$ 为单元刚度矩阵, 是由变形刚度矩阵 $[K_{fe}]$ 及几何刚度矩阵 $[K_{Ge}]$ 组成.

$$\text{其中: } [K_{fe}] = \begin{bmatrix} EI_y [Z_{22}] & 0 & 0 \\ 0 & EI_x [Z_{22}] & 0 \\ 0 & 0 & EI_\omega [Z_{22}] + GI_k [Z_{11}] \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$[K_{Ge}] = \begin{bmatrix} -P[Z_{11}] & 0 & -[Z_{11}M_x] - [Z_{10}\theta_y] \\ 0 & -P[Z_{11}] & [Z_{11}M_y]^t + [Z_{10}\theta_x] \\ -[Z_{11}M_x] - [Z_{10}\theta_y]^t & [Z_{11}M_y] + [Z_{10}\theta_x]^t & a_x[Z_{00}q_x] + a_y[Z_{00}q_y] + [P_{x,y}] \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\text{位移: } \{\Delta_e\} = [u_i, u_i', u_j, u_j', v_i, v_i', v_j, v_j', \theta_i, \theta_i', \theta_j, \theta_j']^t \tag{12}$$

杆端内力符号按下图规定:



图 5 杆端力的方向

$\{F_e\}$ 为单元的力矩阵, 是一个 1×12 的列矩阵, 包含 12 个杆端力 $\{Q_{xi}, M_{yi}, Q_{xj}, M_{yj}, Q_{yi}, M_{xi}, Q_{yj}, M_{xj}, M_{zi}, B_{\omega i}, M_{zj}, B_{\omega j}\}^T$, 当杆间作用均布荷载 q_x, q_y 及均布扭矩 m 时, 相应的 $\{F_e\}$ 以如下转置矩阵形式所示:

$$\{F_e\} = \begin{bmatrix} \frac{l}{2} \\ \frac{l^2}{12} \\ \frac{l}{2} \\ -\frac{l^2}{12} \end{bmatrix} q_x + \begin{bmatrix} Q_{xi} \\ M_{yi} \\ Q_{xj} \\ M_{yj} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{l}{2} \\ \frac{l^2}{12} \\ \frac{l}{2} \\ -\frac{l^2}{12} \end{bmatrix} q_y + \begin{bmatrix} Q_{yi} \\ M_{xi} \\ Q_{yj} \\ M_{xj} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{l}{2} \\ \frac{l^2}{12} \\ \frac{l}{2} \\ -\frac{l^2}{12} \end{bmatrix} m + \begin{bmatrix} M_{zi} \\ B_{\omega i} \\ M_{zj} \\ B_{\omega j} \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$\text{等截面单元刚度矩阵为 } [K_e] = [K_{fe}] + [K_{Ge}] \tag{14}$$

在式(10)、(11)中各分块矩阵如下:

$$[z_{22}] = \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ & \frac{4}{l} & -\frac{6}{l} & \frac{2}{l} \\ \text{对 称} & & \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ & & & \frac{4}{l} \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$[z_{11}] = \begin{bmatrix} \frac{6}{5l} & \frac{1}{10} & -\frac{6}{5l} & \frac{1}{10} \\ & \frac{2l}{15} & -\frac{1}{10} & -\frac{l}{30} \\ \text{对 称} & & \frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} \\ & & & \frac{2l}{15} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$z_{10} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{l}{10} & -\frac{1}{2} & \frac{l}{10} \\ & 0 & -\frac{l}{10} & \frac{l^2}{60} \\ \text{对 称} & & \frac{1}{2} & -\frac{l}{10} \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$[z_{11}M_x] = [T]^t \int_0^l M_x \{z'\} \{z'\}^t dz [T] \quad (18)$$

$$[z_{11}M_y] = [T]^t \int_0^l M_y \{z'\} \{z'\}^t dz [T] \quad (19)$$

$$[z_{10}Q_x] = [T]^t \int_0^l Q_x \{z\} \{z\}^t dz [T] \quad (20)$$

$$[z_{10}Q_y] = [T]^t \int_0^l Q_y \{z\} \{z\}^t dz [T] \quad (21)$$

$$[z_{00}q_x] = [T]^t \int_0^l q_x \{z\} \{z\}^t dz [T] \quad (22)$$

$$[z_{00}q_y] = [T]^t \int_0^l q_y \{z\} \{z\}^t dz [T] \quad (23)$$

$$[P_{x,y}] = \begin{bmatrix} p_{xi}b_{xi} + p_{yi}b_{yi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{xj}b_{xj} + p_{yj}b_{yj} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/l^2 & -2/l & 3/l^2 & -1/l \\ 2/l^3 & 1/l^2 & -2/l^3 & 1/l^2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

3.2 楔形单元刚度矩阵

由楔形杆的基本方程(1),(2),(7)式可看出,当单元长度足够小时,楔形杆的基本方程仍可按等截面杆来考虑,但应在截面杆的基础上加上楔形杆中产生的附加扭矩 M_{z3} . 本文在处理楔形单元时,仍采用等截面单元,但楔形单元的总势能表达式应在等截面杆的基础上再加上由 M_{z3} 产生的应变能 $\frac{1}{2} \int_0^l M_{z3} \theta' dz$. 将此应变能加入到总势能方程(8)中,按最小势能原理,对各位移求一阶导数并等于零后得到的楔形杆的单元矩阵仍为

$$[K_e] = [K_{fe}] + [K_{Ge}]$$

其中:

$$[K_{fe}] = \begin{bmatrix} EI_y [z_{22}] & 0 & 0 \\ 0 & EI_x [z_{22}] & 0 \\ 0 & 0 & EI_\omega ([z_{22}] + [z_t]) + (GI_k + EI_\omega \varphi^2) [z_{11}] \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$[z_i] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$[K_{ce}]$ 同式(11). I_f 为一块翼缘截面对腹板轴的惯性矩. 其余分项矩阵同3.1所述. 式(26)既为楔形单元刚度矩阵, 式中 I_y, I_x, I_w 等几何值取单元杆中点截面的对应值. 楔形单元刚度矩阵与等截面单元刚度矩阵相比, 形式完全一致, 但楔形单元刚度的 $[K_{fe}]$ 中多了 $EI_w[z_i] + EI_f \rho^2[z_{11}]$ 项.

4 计算结果分析

4.1 有限元结果验证

文献[2]直接建立楔形梁的平衡微分方程, 用伽辽金法求得楔形梁的临界弯矩, 计算用的梁截面尺寸、荷载、边界条件见图5. 分别用等截面单元刚度矩阵和楔形单元刚度矩阵编制了有限元程序, 用于求解楔形梁的弹性失稳的临界弯矩, 并对比二者间计算结果的差别. 楔形梁的尺寸如图6所示.

首先初始给定端弯矩 M_0 及 M_1 , 然后按比例增加弯矩值至失稳时, 两端弯矩分别为 $\mu_{cr}M_0$ 及 $\mu_{cr}M_1$, 表1中分别列出了等截面有限单元法结果、楔形单元有限单元法结果, 另外还列出了 M_{z3} 考虑项后的伽辽金法计算结果[2]. 从表1中的结果可以看出采用楔形单元的计算结果与文献[2]的结果十分吻合, 且所有临界弯矩均比采用等截面所得的结果要高. 随着楔度的增加, 等截面单元所计算的结果偏差也就越来越大, 最大时可达13%.

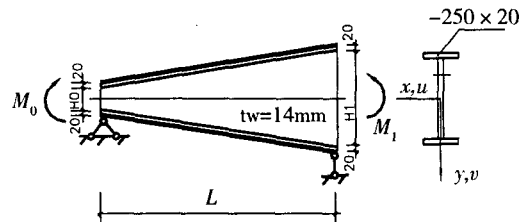


图6 计算用楔形梁截面尺寸

4.2 等截面单元与楔形单元的计算结果对比

为了分析对比在不同荷载及支座条件下, 采用等截面单元计算楔形杆稳定荷载时的计算误差, 现取两种常用形式的楔形梁进行对比, 第一种为简支楔形梁, 大、小端受集中弯矩 M_1, M_0 ; 第二种为悬臂楔形梁, 大端固定, 小端受集中力作用. 梁的大、小端的截面尺寸给定, 改变梁长 L , 这样梁的锥度 $\gamma = (H_1 - H_0)/L$ 随之改变. 图7、图8分别给出梁长 L 及锥度 $\gamma = (H_1 - H_0)/L$ 变化时 $M_{cr楔}/M_{cr等}$ 、 $P_{cr楔}/P_{cr等}$ 的关系曲线. 相应的计算结果见表2及表3. 由对比结果可见:

- (1) 简支梁或悬臂梁采用等截面单元时, 随着杆长的减小, 锥度的增大, 误差将逐步增加;
- (2) 对于简支梁, 梁的临界弯矩比值 $M_{cr楔}/M_{cr等}$ 仅与锥度 γ 有关, 而与大小端的弯矩的比值几乎无关;
- (3) 悬臂梁通常比较短, 因此其锥度较大. 在本算例中, 当悬臂梁的长度为2米时, 用等截面单元求得的临界力将比楔形单元的结果小27%, 这种误差是非常大的, 不容忽视.

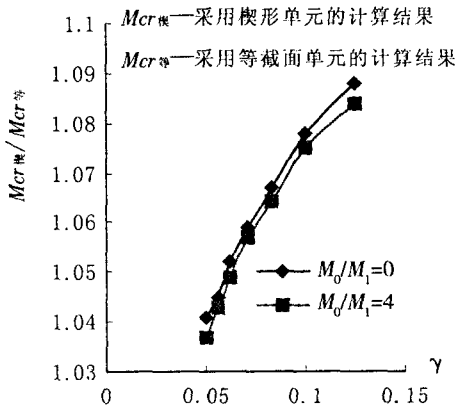


图7 简支楔形梁 $M_{cr楔}/M_{cr等} - \gamma$ 关系曲线

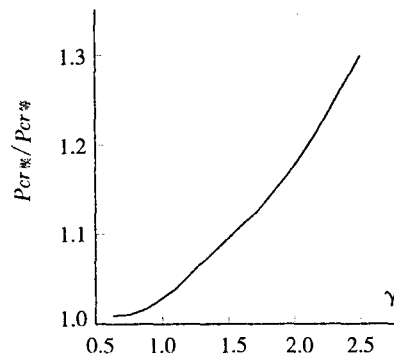


图8 悬臂楔形梁 $P_{cr楔}/P_{cr等} - \gamma$ 关系曲线

表1 楔形梁的弹性临界弯矩对比

杆长 /m	编号	腹板高/m		$M(H_0)$ /kNm	$M(H_1)$ /kNm	迦辽金法 $\mu_{cr}^{[2]}$	有限元法 μ_{cr}	
		H_0	H_1				楔形单元	等截面单元
L = 5	P1 - 1A	0.4	0.8	200	- 800	4.615	4.641	4.487
	2A			200	- 600	6.538	6.591	6.368
	3A			200	400	5.318	5.301	5.148
	P2 - 1A	0.2	0.7	200	- 800	3.946	3.981	3.692
	2A			200	- 500	7.035	7.111	6.608
	3A			200	- 200	17.542	17.121	16.770
	P3 - 1A	0.2	1.0	200	- 1200	3.150	3.161	2.792
	2A			200	- 1000	3.883	3.901	3.446
	3A			200	800	3.379	3.351	2.967
L = 10	P1 - 1B	0.4	0.8	200	- 800	1.509	1.522	1.490
	2B			200	- 600	2.133	2.151	2.109
	3B			200	400	1.769	1.771	1.739
	P2 - 1B	0.2	0.7	200	- 800	1.365	1.381	1.328
	2B			200	- 500	2.421	2.451	2.361
	3B			200	- 200	6.230	6.161	6.210
	P3 - 1B	0.2	1.0	200	- 1200	1.010	1.020	0.947
	2B			200	- 1000	1.242	1.257	1.166
	3			200	800	1.100	1.099	1.023

表2 楔形简支梁计算结果对比

(截面尺寸:大端 H728 × 250 × 14 × 20,小端 H228 × 250 × 14 × 20)

杆长 /m	M_0/M_1	大端 $M_{cr楔}$	大端 $M_{cr等}$	$M_{cr楔}$ / $M_{cr等}$	$\gamma = (H_1 - H_0)/L$
L = 4	0	3 810	3 501	1.088	0.125
	4	3 116	2 876	1.083	
L = 5	0	2 600	2 411	1.078	0.100
	4	2 132	1 988	1.072	
L = 6	0	1 937	1 815	1.067	0.083
	4	1 588	1 496	1.061	
L = 7	0	1 526	1 441	1.059	0.071
	4	1 256	1 188	1.057	
L = 8	0	1 252	1 190	1.052	0.062 5
	4	1 032	984	1.049	
L = 9	0	1 058	1 012	1.045	0.056
	4	872	836	1.043	
L = 10	0	915	879	1.041	0.050
	4	758	731	1.037	

表3 楔形悬臂梁计算结果对比

(截面尺寸:大端 H728 × 250 × 14 × 20,小端 H228 × 250 × 14 × 20)

杆长 /m	$P_{cr楔}$	$P_{cr等}$	$P_{cr楔}$ / $P_{cr等}$	$\gamma = (H_1 - H_0)/L$ $= 0.5/L$
L = 2	4 360	3 440	1.267	0.250
L = 3	1 683	1 499	1.123	0.170
L = 4	878	822	1.068	0.125
L = 5	528	514	1.027	0.100
L = 6	330	324	1.0185	0.083
L = 7	221	219	1.009	0.071
L = 8	157.7	156.3	1.009	0.063

5 结束语

用本文所得出的楔形单元刚度矩阵所计算出的楔形梁的临界弯矩,与迦辽金法所得结果一致.通过与等截面单元的结果对比发现,对于伴有扭转的失稳现象,等截面单元刚度矩阵不能替代楔形单元刚度矩阵.要得到较为精确的计算结果,必须采用楔形单元刚度矩阵.

参考文献:

- [1] 吕烈武等. 钢结构构件稳定理论[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1982. 111 ~ 116.
- [2] Mar BRAHAM. Elastic Lateral - Torsional Buckling of Web Tapered I - beams June, 1997.
- [3] Timoshenko, S. P. - Gere, J. M. Theory of Elastic Stability Mc Graw, New York. 1961.
- [4] Trahair. Elastic Lateral Buckling of Stepped I - Beams[J]. J. of the Struct. Div., ASCE97, 1971, St10.
- [5] Kitipornchai. Elastic Stability of Tapered I - Beams[J]. J. of the Struct. Div., ASCE98, 1972, St3.