第29卷第5期 昆明理工大学学报(理工版) Vol.29 No.5
2004年10月 Journal of Kunming University of Science and Technology(Science and Technology) Oct. 2004

带参数矩阵特征方程的性质探讨

马 锐
(云南财贸学院 数学教研室,云南 昆明 650221)

摘要:利用与文[1]相类似的方法,探讨了带参数矩阵的特征方程存在纯虚特征根的性质,进一步讨论了当 $n=5$ 和 $n=6$ 时实系数齐次线性微分方程组的矩阵具有纯虚特征根的条件,得到了几个有用的结果.

关键词:特征根;矩阵;多项式
中图分类号:O151.21 **文献标识码**:A **文章编号**:1007-855X(2004)05-0136-04

Properties of Characteristic Equation of Matrix with Parameter

MA Rui
(Mathematics Teaching Group, Yunnan Financial and Trade Institute, Kunming 650221, China)

Abstract: Using the same method used in paper[1], the properties of matrix characteristic equation which has pure imaginary eigenvalue, are analyzed, and the conditions under which homogenieus linear differential equation system with real coefficients has pure imaginary eigenvalue are further studied. Several useful results are gained.

Key words: eigenvalue root; matrix; polynomial

0 引 言

向量形式的实系数齐次微分方程组为

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=AX \tag{1}$$

其中 $A=(a_{ij}(\alpha))$ 是 n 阶实矩阵,α 是实参数.

众所周知,若 A 的特征根是纯虚数,则方程组(1)的解在生物生长系统中有着特殊的含义,文[1]研究了当 $n=3$ 及 $n=4$ 时方程组(1)的矩阵具有纯虚特征根的一些条件,具有很多实际意义.

本文进一步讨论当 $n=5$ 及 $n=6$ 时方程组(1)的矩阵具有纯虚特征根的一些性质.

1 预备知识

记 $f(\lambda)=\det(E\lambda-A)$,其中 E 是 n 阶单位阵,显然,$f(\lambda)$ 是 n 次多项式.令

$$f(\lambda)=a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots\cdots+a_1\lambda+a_0 \tag{2}$$

则易知

$$a_k=\frac{f^{(k)}{}_{(0)}}{k!}\qquad 1\leqslant k\leqslant n$$

所以 $a_0=f(0)$,而且,由行列式的性质易知 $f(0)=(-1)^n\det A$,$a_n=1$ 以及 $a_{n-1}=\dfrac{f^{(n-1)}_{(0)}}{(n-1)!}=-\operatorname{tr}A$.于是,(2)又可以表示为

$$f(\lambda)=\lambda^n-\operatorname{tr}A\lambda^{n-1}+a_{n-2}\lambda^{n-2}+\cdots\cdots+(-1)^n\det A \tag{3}$$

例1 设

收稿日期:2004-05-09.
作者简介:马 锐(1963.12~),女,副教授.主要研究方向:应用数学.E-mail:yjk1102@163.com.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

a_{ij} 为实数,则

$$f(\lambda) = | E\lambda - A | = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix},$$

$$f'(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{13} \\ -a_{31} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix}.$$

同理可得

$$f''(\lambda) = 6\lambda - 2(a_{11} + a_{22} + a_{33})$$

于是 $a_2 = \frac{f''(0)}{2} = -(a_{11} + a_{22} + a_{33}) = -\operatorname{tr} A$

注:以下所涉及的特征方程的根都是指当 α 取确定的值 α_0 时的根,多项式的系数也都是指数 $\alpha = \alpha_0$ 时的值.

显然,方程(2)或(3)有零根当且仅当 $\det A = 0$.

现在,假设 n 为奇数,令 $n = 2m + 1$,并假设(3)有形如 $\lambda_0 = iw$ 的根,w 是非零实数,则由(2)得

$$\sum_{k=0}^{2m+1} a_k (iw)^k = 0$$

上式可变为

$$i[a_1 w - a_3 w^3 + \cdots + (-1)^m a_{2m+1} w^{2m+1}] + [a_0 - a_2 w^2 + \cdots + (-1)^m a_{2m} w^{2m}] = 0$$

记

$$p(w) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k a_{2k+1} w^{2k+1}$$

及

$$Q(w) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k a_{2k} w^{2k}$$

于是,下面的命题 1 的结论是明显的.

命题 1　当 $n = 2m + 1$ 时,(3)有形如 $\lambda_0 = iw$ 的根的充要条件是存在实数 w 使得

$$p(w) = Q(w) = 0$$

又当 n 为偶数时,记 $n = 2m$,则(3)可表示为

$$\sum_{k=0}^{2m} a_k (iw)^k = 0$$

同样,记

$$p_0(w) = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k a_{2k+1} w^{2k+1}$$

及

$$Q_0(w)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k a_{2k}w^{2k}$$

则有下面的命题

命题2 当 $n=2m$ 时,(3)有形如 $\lambda_0=iw$ 的根当且仅当存在实数 w 使得

$$p_0(w)=Q_0(w)=0$$

2 主要结论

下面,具体考察 $n=5$ 及 $n=6$ 时特征方程(2)具有纯虚根的条件.

当 $n=5$ 时,有

$$p(w)=a_1w-a_3w^3+a_5w^5$$
$$Q(w)=a_0-a_2w^2+a_4w^4$$

且 $a_5=1,a_4=-\operatorname{tr}A,a_0=(-1)^5\det A$,于是,有如下命题:

命题3 设 $n=5,\det A\neq 0,f'(0)=0$,则(3)有纯虚根的充要条件是

(1) $a_3>0$;

(2) $\begin{vmatrix}1 & -a_3 & 0\\ 0 & 1 & -a_3\\ a_4 & -a_2 & a_0\end{vmatrix}=0$

证明 当 $n=5$ 时,$p(w)=w^5-a_3w^3+a_1w$ 及 $Q(w)=a_4w^4-a_2w^2+a_0$,由于 $\det A\neq 0$ 以及 $a_1=f'(0)=0$,故 $p(w)=0$ 当且仅当 $w^2-a_3=0$,因此,当且仅当 $a_3>0$ 时 w 是非零实数.

对多项式 w^2-a_3 及 $Q(w)$ 应用多项式的结式的性质,即得存在 w 使得 w^2-a_3 与 $Q(w)$ 同时为零的充要条件是

$$\begin{vmatrix}1 & -a_3 & 0\\ 0 & 1 & -a_3\\ a_4 & -a_2 & a_0\end{vmatrix}=0$$

命题4 设 $n=5,\det A\neq 0,a_2\neq 0$ 及 $trA=0$,则(3)有纯虚根的充要条件是

(1) $\dfrac{a_0}{a_2}<0$;

(2) $\begin{vmatrix}1 & -a_3 & a_1\\ a_2 & -a_0 & 0\\ 0 & a_2 & -a_0\end{vmatrix}=0$

证明 当 $\det A\neq 0$ 时,$p(w)=0$ 当且仅当 $w^4-a_3w^2+a_1=0,Q(w)=0$ 当且仅当 $a_2w^2-a_0=0$

于是,w 为非零实数当且仅当$\dfrac{a_0}{a_2}<0$,再对多项式 $a_2w^2-a_0$ 与 $w^4-a_3w^2+a_1$,应用结式的性质即得两多项式同时为零的充要条件是

$$\begin{vmatrix}1 & -a_3 & a_1\\ a_2 & -a_0 & 0\\ 0 & a_2 & -a_0\end{vmatrix}=0$$

命题5 设 $n=6,\det A\neq 0,f'''(0)=0$,则(3)有纯虚根的充要条件是

(1) $a_3a_5>0$

$$(2)\quad \begin{vmatrix} 1 & -a_4 & a_2 & -a_0 \\ a_5 & -a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_5 & -a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_5 & -a_3 \end{vmatrix} = 0$$

证明　当 $n=6$ 时，$p_0(w)=w^6-a_4w^4+a_2w^2-a_0$，$Q_0(w)=a_5w^5-a_3w^3+a_1w$，由于 $a_1=0$，故 $Q_0(w)=a_5w^5-a_3w^3$，因 $\det A\neq 0$，故 $Q_0(w)=0$ 当且仅当 $a_5w^2-a_3=0$. 由多项式结式性质得，存在实数 w 使得 $p_0(w)=Q_0(w)=0$ 的充要条件是

$$\begin{vmatrix} a_5 & -a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_5 & -a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_5 & -a_3 \\ 1 & -a_4 & a_2 & -a_0 \end{vmatrix} = 0$$

又条件(a)保证 w 是非零实数.

例　设 $n=6$ 及矩阵 A 的特征的方程为 $f(\lambda)=\lambda^6-\frac{60}{11}\lambda^5+\frac{96}{11}\lambda^4-\frac{60}{11}\lambda^3+\frac{49}{11}\lambda^2-\frac{36}{11}=0$，则由命题5易知 A 有纯虚数特征根.

参考文献：

[1] 唐民英，和福生．参数矩阵虚特征值的判别与应用[J]．云南师范大学学报（自然科学版），1993，(2)：5～13．

[2] 张禾瑞，郝钢新．高等代数[M]．北京：高等教育出版社，1999．289～308．

[3] 复旦大学数学系编．常微分方程[M]．上海：上海科学技术出版社，1962．

[4] Scott S K. Chemical chaos[M]. New York: OXFORD Science Publications, 1991. 88～99.

[5] Hassard B D, et al. Theory and Applications of the hops Bifurcation[M]. Cambridge University press, 1980.