

doi: 10.3969/j.issn.1007-855x.2011.02.011

# 带有时变时滞和线性耦合的复杂网络同步

李红敏 褚衍东 张建刚 柳 亭

(兰州交通大学 数理与软件工程学院,甘肃 兰州 730070)

**摘要:** 主要讨论了耦合和节点都带有时变时滞,以及耦合函数为线性的动态网络模型的同步问题. 首先建立该模型,然后针对这个新模型,基于 Lyapunov 稳定性理论和线性矩阵不等式(LMI),得到了一些网络同步的充分条件. 理论推导和数值结果均表明该同步方法的有效性和可行性.

**关键词:** 同步; 时变时滞; 复杂动态网络; Lyapunov 稳定性理论; 线性矩阵不等式(LMI)

**中图分类号:** O231; TP393; TP271 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-855X(2011)02-0050-06

## Synchronization of Linear Complex Network with Time-Varying Delays

LI Hong-min, CHU Yan-dong, ZHANG Jian-gang, LIU Ting

(School of Mathematics, Physics and Software Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

**Abstract:** We introduce complex dynamical network models with two kinds of time-varying delays in both nodes and coupling item of networks. We then investigate their synchronization phenomena and criteria. Based on these new complex network models, we derive synchronization conditions in terms of the Lyapunov stability theory and linear matrix inequalities (LMI). Furthermore, both the theoretical analysis and the results of numerical simulations illuminate the validity and feasibility of the synchronized method.

**Key words:** synchronization; time-varying delay; complex dynamical network; Lyapunov stability theory; linear matrix inequality (LMI)

## 0 引言

复杂网络的研究已经渗透到许多科学领域,从物理学、生物神经学到工程学与社会科学等都有着重要的应用<sup>[1-3]</sup>. 如今,国内外掀起了研究复杂网络的热潮,其中主要研究这些网络的拓扑结构及其动力学行为. 在诸多的动力行为当中,网络所有节点的同步是自然界中广泛存在的一类非常重要的非线性现象,复杂网络展示了丰富多彩的网络同步现象. 近来,耦合动态网络的同步已成为非线性动力学研究的热点<sup>[4-5]</sup>. 实际上,许多同步现象都受时滞的影响,如在流行病网络中的病毒扩散和 Internet 中拥塞现象,还有在生物网络和物理网络中,以及我们经常提起的神经网络. 并且大部分时滞都是随时间变化的. 然而,在先前的很多的研究工作中都没有涉及到时滞,研究时变时滞的更少<sup>[6-7]</sup>,但是许多实际问题并非如此. 因此,本文研究了耦合项和节点都含时变时滞,以及耦合函数为线性的复杂网络的同步. 通过该研究,一方面可以使我们更好地了解 and 解释现实世界中复杂网络所呈现出来的各种动态特征;另一方面我们得到的结果可以为现实中具体网络的控制提供理论参考.

## 1 理论分析

文献[8]讨论下列网络模型的同步问题:

收稿日期:2010-09-25. 基金项目:国家自然科学基金(50474008);甘肃省自然科学基金项目(1010RJZA066);兰州交通大学科研基金(DXS2010-019).

作者简介:李红敏(1983-),女,在读硕士. 主要研究方向:复杂网络及混沌同步. E-mail: lhm831005@126.com

通信作者:褚衍东(1958-),男,教授,硕士生导师. 主要研究方向:复杂网络及混沌同步与控制. E-mail: cyd@mail.lzjtu.cn

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t), x_i(t - \tau_1)) + d \sum_{j=1}^N c_{ij} G x_j(t - \tau_2), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

其中  $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})^T \in R^n$  是节点  $i$  的状态变量;  $f: R^n \rightarrow R^n$  是连续可微的非线性函数;  $d$  是网络的耦合强度;  $G \in R^{n \times n}$  描述了节点  $i$  和节点  $j$  之间的内部耦合;  $C = (c_{ij})_{n \times n}$  代表整个网络的外部耦合, 其中元素  $c_{ij}$  被定义为: 如果节点  $i$  和节点  $j (j \neq i)$  之间有连接  $c_{ij} = c_{ji} = 1$ ; 否则  $c_{ij} = c_{ji} = 0$ . 此外, 矩阵  $C$  的对角元素满足下式  $c_{ii} = -\sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij} = -\sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ji}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ); 时滞  $\tau_i (i = 1, 2)$  是常数.

本文对上面的模型 (1) 进行了推广, 将分析带有两类时变时滞和线性内部耦合函数的复杂动态网络的同步问题, 其中两类时滞分别为: 时滞函数和时滞向量函数. 其模型依次如下:

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t), x_i(t - \tau_1(t))) + d \sum_{j=1}^N c_{ij} G x_j(t - \tau_2(t)) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t), \overline{x_i(t - \tau_1(t))}) + d \sum_{j=1}^N c_{ij} G \overline{x_j(t - \tau_2(t))} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

其中  $x_i (i = 1, 2, \dots, N)$ ,  $f, G, C$  和  $d$  与方程 (1) 相同变量的意义相同, 不同之处在于方程 (2) 和 (3) 中时滞  $\tau_i(t) (i = 1, 2)$  分别是非负的连续函数和非负的连续向量函数. 对于所有的  $t \geq 0$  有  $0 \leq \tau_i(t) \leq \tau$  成立; 且

$$\begin{aligned} x_i(t - \tau_1(t)) &= (x_{i1}(t - \tau_{11}(t)), x_{i2}(t - \tau_{12}(t)), \dots, x_{in}(t - \tau_{1n}(t)))^T, \\ x_j(t - \tau_2(t)) &= (x_{j1}(t - \tau_{21}(t)), x_{j2}(t - \tau_{22}(t)), \dots, x_{jn}(t - \tau_{2n}(t)))^T, \\ \overline{x_i(t - \tau_1(t))} &= (\overline{x_{i1}(t - \tau_{11}(t))}, \overline{x_{i2}(t - \tau_{12}(t))}, \dots, \overline{x_{in}(t - \tau_{1n}(t))})^T, \\ \overline{x_j(t - \tau_2(t))} &= (\overline{x_{j1}(t - \tau_{21}(t))}, \overline{x_{j2}(t - \tau_{22}(t))}, \dots, \overline{x_{jn}(t - \tau_{2n}(t))})^T. \end{aligned}$$

引理 1<sup>[9]</sup> 假设矩阵  $C$  满足上面的条件, 则有:

- 1) 0 是矩阵  $C$  的重数为一的特征值, 其特征向量为  $(1, 1, \dots, 1)^T$ ;
- 2) 矩阵  $C$  的所有特征值满足不等式  $0 = \lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_N$ ;
- 3) 存在一个酉阵  $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$  满足  $C^T \varphi_k = \lambda_k \varphi_k, k = 1, 2, \dots, N$ . 其中  $\lambda_k (k = 1, 2, \dots, N)$  是矩阵  $C$  的特征值.

定义 1 系统 (2) 和 (3) 的(渐近)同步态定义为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - s(t)\| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

其中网络 (2) 和 (3) 的同步态  $s(t) \in R^n$  满足如下的微分方程

$$\dot{s}(t) = f(s(t), s(t - \tau_1(t))) \quad (4)$$

$$\dot{s}(t) = f(s(t), \overline{s(t - \tau_1(t))}) \quad (5)$$

显然, 同步态  $s(t)$  的稳定性取决于函数  $f$ , 时变时滞  $\tau_1(t)$  和  $\overline{\tau_1(t)}$ . 其中  $\overline{\tau_1(t)} = (\tau_{11}(t), \tau_{12}(t), \dots, \tau_{1n}(t))^T$ .

令  $x_i(t) = s(t) + e_i(t)$ , 则系统 (2) 和 (3) 分别转换为:

$$\begin{aligned} \dot{e}_i(t) &= f(x_i(t), x_i(t - \tau_1(t))) - f(s(t), s(t - \tau_1(t))) \\ &\quad + d \sum_{j=1}^N c_{ij} G (x_j(t - \tau_2(t)) - s(t - \tau_2(t))) \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}_i(t) &= f(x_i(t), \overline{x_i(t - \tau_1(t))}) - f(s(t), \overline{s(t - \tau_1(t))}) \\ &\quad + d \sum_{j=1}^N c_{ij} G (\overline{x_j(t - \tau_2(t))} - \overline{s(t - \tau_2(t))}) \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (7)$$

把式 (6) 和 (7) 分别部分线性化

$$\begin{aligned} \dot{e}_i(t) &= A e_i(t) + B e_i(t - \tau_1(t)) + d \sum_{j=1}^N c_{ij} G e_j(t - \tau_2(t)), \\ \dot{e}_i(t) &= \overline{A} e_i(t) + \overline{B} e_i(t - \tau_1(t)) + d \sum_{j=1}^N c_{ij} G \overline{e}_j(t - \tau_2(t)), \end{aligned}$$

其中  $A(t) = J_1 f(s(t), s(t - \tau_1(t)))$ ,  $B(t) = J_2 f(s(t), s(t - \tau_1(t)))$ , 和  $\overline{A}(t) = J_1 f(s(t), \overline{s(t - \tau_1(t))})$ ,  $\overline{B}(t) = J_2 f(s(t), \overline{s(t - \tau_1(t))})$  分别是  $f(s(t), s(t - \tau_1(t)))$  和  $f(s(t), \overline{s(t - \tau_1(t))})$  的 Jacobian 矩阵.  $J_1, J_2$  表示对函数  $f(\cdot, \cdot)$  的第一个和第二个变量求微分.

设  $e(t) = [e_1(t), e_2(t), \dots, e_N(t)] \in R^{n \times N}$ , 得

$$\dot{e}(t) = A e(t) + B e(t - \tau_1(t)) + d G e(t - \tau_2(t)) C^T, \quad (8)$$

$$\dot{\bar{e}}(t) = \bar{A} e(t) + \bar{B} e(t - \tau_1(t)) + d \bar{G} e(t - \tau_2(t)) C^T, \quad (9)$$

其中  $\overline{e(t - \tau_1(t))} = (\overline{e_1(t - \tau_1(t))}, \overline{e_2(t - \tau_1(t))}, \dots, \overline{e_n(t - \tau_1(t))})$   
 $\overline{e(t - \tau_2(t))} = (\overline{e_1(t - \tau_2(t))}, \overline{e_2(t - \tau_2(t))}, \dots, \overline{e_n(t - \tau_2(t))})$ .

根据引理 1, 我们可知存在一个酉阵  $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$  满足  $C^T \varphi_k = \lambda_k \varphi_k, k = 1, 2, \dots, N$ .

令  $e(t) \varphi_k = w_k(t)$ , 式(8)和(9)又分别被转换为

$$\dot{w}_k(t) = A w_k(t) + B w_k(t - \tau_1(t)) + d \lambda_k G w_k(t - \tau_2(t)) \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (10)$$

$$\dot{\bar{w}}_k(t) = \bar{A} w_k(t) + \bar{B} w_k(t - \tau_1(t)) + d \lambda_k \bar{G} w_k(t - \tau_2(t)) \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (11)$$

当  $\lambda_1 = 0$  时, (10)和(11)正好与网络的同步态方程相对应.

**定理 1** 考虑系统(2), 假设  $\dot{\tau}(t) < \sigma (\sigma < 1)$ , 矩阵  $C$  的特征值排列如下:

$$0 = \lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_N.$$

如果存在一个正定矩阵  $M > 0$  满足下式

$$L_1 = \begin{pmatrix} A^T M + M A + 2I & M B & d \lambda_k M G \\ B^T M & -I & 0 \\ d \lambda_k G^T M & 0 & -I \end{pmatrix} < 0, k = 2, \dots, N. \text{ 其中 } I \text{ 是 } n \text{ 阶单位矩阵.}$$

那么对于任意的时变时滞  $\tau_1(t), \tau_2(t)$ , 系统(1)关于同步态(4)渐近稳定.

**证明** 考虑  $\dot{w}_k(t) = A w_k(t) + B w_k(t - \tau_1(t)) + d \lambda_k G w_k(t - \tau_2(t)), k = 2, \dots, N$ . 也就是  $\dot{W}(t) = A W(t) + B W(t - \tau_1(t)) + d \lambda_k G W(t - \tau_2(t)) \quad k = 2, \dots, N$ , (12)

其中  $W(t) = (w_1, w_2, \dots, w_N)^T, W(t - \tau_1(t)), W(t - \tau_2(t)) \in \mathbf{R}^n, k = 2, \dots, N$ .

构造 Lyapunov 函数

$$V(t) = W(t)^T M W(t) + \int_{t-\tau_1(t)}^t W(\alpha)^T W(\alpha) d\alpha + \int_{t-\tau_2(t)}^t W(\alpha)^T W(\alpha) d\alpha,$$

$V(t)$  沿着系统(12)的导为

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{W}^T(t) M W(t) + W^T(t) M \dot{W}(t) + W^T(t) \dot{M} W(t) + (1 - \dot{\tau}_1(t)) (W^T(t) W(t)) \\ &+ (1 - \dot{\tau}_2(t)) (W^T(t) W(t) + W^T(t - \dot{\tau}_1(t)) W(t - \dot{\tau}_1(t))) + W^T(t - \dot{\tau}_2(t)) W(t - \dot{\tau}_2(t)) \\ &\leq \dot{W}^T(t) M W(t) + W^T(t) M \dot{W}(t) + W^T(t) \dot{M} W(t) + (1 - \sigma) (W^T(t) W(t) \\ &+ W^T(t - \dot{\tau}_1(t)) W(t - \dot{\tau}_1(t))) + (1 - \sigma) (W^T(t) W(t) + W^T(t - \dot{\tau}_2(t)) W(t - \dot{\tau}_2(t))) \\ &\leq W^T(t) A^T M W(t) + W^T(t - \tau_1(t)) B^T M W(t) + d \lambda_k W^T(t - \tau_2(t)) G^T M W(t) \\ &+ W^T(t) M A W(t) + W^T(t) M B W(t - \tau_1(t)) + d \lambda_k W^T(t) M G W(t - \tau_2(t)) \\ &+ 2 W^T(t) W(t) - W^T(t - \tau_1(t)) W(t - \tau_1(t)) - W^T(t - \tau_2(t)) W(t - \tau_2(t)) \\ &= \begin{pmatrix} W(t) \\ W(t - \tau_1(t)) \\ W(t - \tau_2(t)) \end{pmatrix}^T L_1 \begin{pmatrix} W(t) \\ W(t - \tau_1(t)) \\ W(t - \tau_2(t)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

根据假设, 我们知道系统(12)的  $N - 1$  方程都满足  $\dot{V}(t) < 0$ . 基于 Lyapunov - Krasovskii 稳定性定理<sup>[10]</sup>, 系统(12)的平凡解是渐近稳定的. 此外, 当它的零解也是渐近稳定时,  $e(t)$  局部渐近收敛到 0. 此时系统(2)关于同步态(4)是渐近稳定的. 证毕.

**定理 2** 考虑系统(3), 假设  $\dot{\tau}_i(t) < \sigma (\sigma < 1)$ , 矩阵  $C$  的特征值排列如下:

$$0 = \lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_N.$$

如果存在一个正定矩阵  $M > 0$  满足下式

$$L_2 = \begin{pmatrix} A^T M + M A + 2I & M B & d \lambda_k M G \\ B^T M & -I & 0 \\ d \lambda_k G^T M & 0 & -I \end{pmatrix} < 0, k = 2, \dots, N. \text{ 其中 } I \text{ 是 } n \text{ 阶单位矩阵.}$$

那么对于任意的时变时滞  $\tau_1(t), \tau_2(t)$ , 系统(3)关于同步态(5)渐近稳定.

证明  $\dot{w}_k(t) = \bar{A}w_k(t) + \bar{B}w_k(t - \tau_1(t)) + d\lambda_k \bar{G}w_k(t - \tau_2(t)) \quad k=2, \dots, N,$

即  $\dot{W}(t) = \bar{A}W(t) + \bar{B}W(t - \tau_1(t)) + d\lambda_k \bar{G}W(t - \tau_2(t)), k=2, \dots, N,$

其中  $W(t) = (w_1, w_2, \dots, w_k)^T \in \mathbb{R}^n \quad k=2, \dots, N, \bar{W}(t - \tau_1(t)) \in \mathbb{R}^n, \bar{W}(t - \tau_2(t)) \in \mathbb{R}^n,$

构造 Lyapunov 函数

$$V(t) = W(t)^T M W(t) + \sum_{j=1}^n \int_{t-\tau_1(t)}^t w_j(\alpha)^T w_j(\alpha) d\alpha + \sum_{j=1}^n \int_{t-\tau_2(t)}^t w_j(\alpha)^T w_j(\alpha) d\alpha.$$

其中  $w_j(\alpha)$  是  $W(\alpha)$  的第  $j$  个元素.

证明的剩余部分与定理 1 相似. 因此被省略.

### 2 数值仿真

为了证明该方法的有效性, 在 Matlab 环境下进行了数值仿真. 为了简单, 我们研究由 10 个节点组成的网络. 节点  $i$  的动力学方程(满足假设条件)为:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = -x_i + y_i^3 - \frac{1}{2}x_i(t - \tau_1(t)) + y_i^3(t - \tau_1(t)) \\ \dot{y}_i(t) = -y_i + x_i^3 - \frac{1}{2}y_i(t - \tau_1(t)) + x_i^3(t - \tau_1(t)) \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, 10. \tag{13}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = -x_i + y_i^3 - \frac{1}{2}x_i(t - \tau_{11}(t)) + y_i^3(t - \tau_{12}(t)) \\ \dot{y}_i(t) = -y_i + x_i^3 - \frac{1}{2}y_i(t - \tau_{12}(t)) + x_i^3(t - \tau_{11}(t)) \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, 10. \tag{14}$$

假设对角矩阵  $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 且选择一个适合的矩阵  $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  矩阵  $C$  为

$$C = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

矩阵  $C$  的所有特征值为  $0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -10$ .

基于网络 (2) 和 (3), 式 (13) 和 (14) 分别相应地转换为下面的方程:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = -x_i + y_i^3 - \frac{1}{2}x_i(t - \tau_1(t)) + y_i^3(t - \tau_1(t)) + d \sum_{j=1}^N c_{ij} x_j(t - \tau_2(t)) \\ \dot{y}_i(t) = -y_i + x_i^3 - \frac{1}{2}y_i(t - \tau_1(t)) + x_i^3(t - \tau_1(t)) + d \sum_{j=1}^N c_{ij} y_j(t - \tau_2(t)) \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, 10 \tag{15}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = -x_i + y_i^3 - \frac{1}{2}x_i(t - \tau_{11}(t)) + y_i^3(t - \tau_{12}(t)) + d \sum_{j=1}^N c_{ij} x_j(t - \tau_{22}(t)) \\ \dot{y}_i(t) = -y_i + x_i^3 - \frac{1}{2}y_i(t - \tau_{12}(t)) + x_i^3(t - \tau_{11}(t)) + d \sum_{j=1}^N c_{ij} y_j(t - \tau_{21}(t)) \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, 10 \tag{16}$$

在方程 (15) 里, 也就是系统 (2) 中  $\pi_1(t) = \frac{1}{t+1}, \pi_2(t) = \frac{1}{e^t}$ ;

在方程 (16) 里, 也就是系统 (3) 中  $\overline{\pi_1(t)} = (\tau_{11}(t), \tau_{12}(t))^T = (|\cos 2t|, |\sin 3t|)^T$ .

由定理 1 和定理 2 知, 整个网络是渐近同步的. 图 1 和 2 分别给出了仿真的部分结果. 正如它们所示,

系统(15)和(16)的误差曲线迅速地收敛到0,也就是说,网络(2)和(3)能很好地达到同步.

分别把图1中的(a)和(b)作比较,(c)和(d)作比较,我们可知:在同样的条件下,时变时滞 $\tau$ 越大,复杂动态网络达到同步所需要的时间就越长.

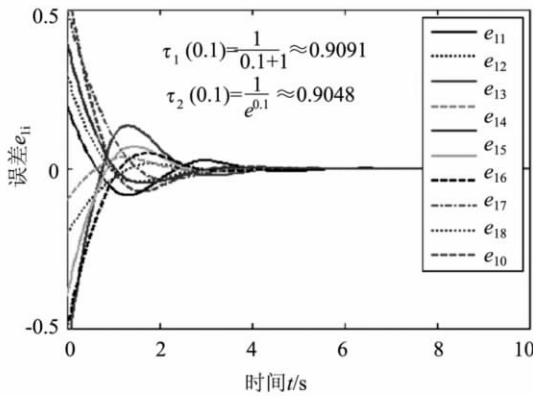


图1(a) 系统(15)中状态变量 $x_i$ 的误差曲线

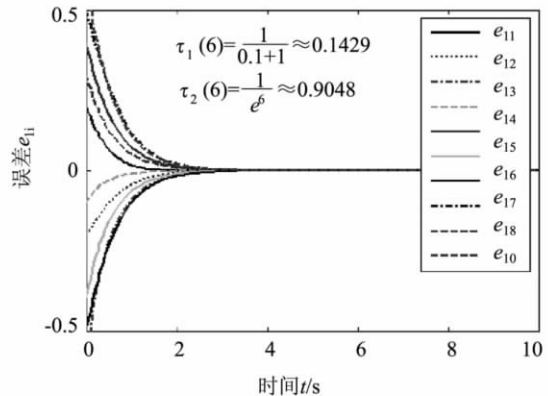


图1(b) 系统(15)中状态变量 $x_i$ 的误差曲线

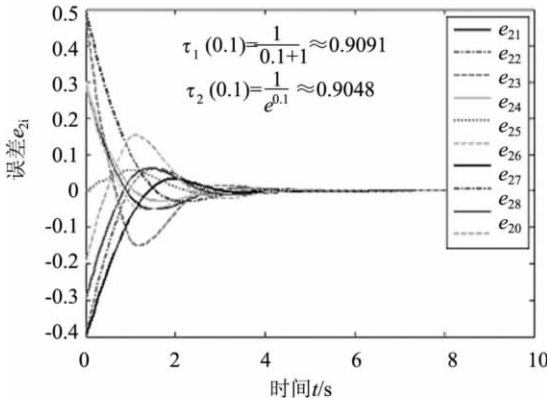


图1(c) 系统(15)中状态变量 $y_i$ 的误差曲线

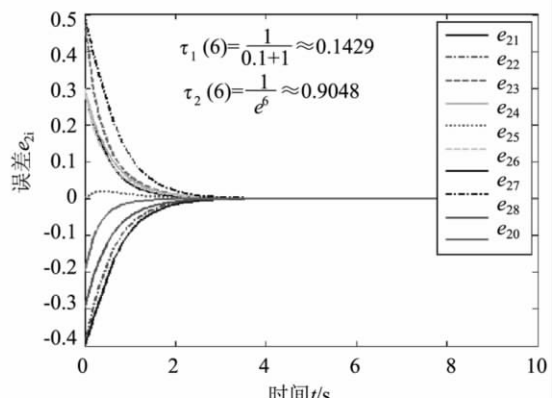


图1(d) 系统(15)中状态变量 $y_i$ 的误差曲线

图1 系统(15)的误差曲线,其中时变时滞分别为 $\tau_1(t) = \frac{1}{t+1}$ ,  $\tau_2(t) = \frac{1}{e^t}$ , (任意地选取 $t=0.1,6$ ),  $d=0.1$ .  
Fig.1 Error curves of systems (15), where  $\tau_1(t) = \frac{1}{t+1}$ ,  $\tau_2(t) = \frac{1}{e^t}$ , (arbitrarily select  $t=0.1,6$ ),  $d=0.1$ .

下面分别给出:耦合强度 $d=0.1$ 和 $d=0.4$ 时,系统(16)的误差曲线(见图2).比较图2的(a)和(b),(c)和(d),可知:耦合强度不同时,误差曲线渐近同步的速度也不一样.在理论允许的范围内,耦合强度越大,达到同步的速度越慢.

### 3 结论

该论文讨论了耦合项和节点都含时变时滞,以及耦合函数为线性的动态网络模型的同步问题.基于Lyapunov稳定性理论和线性矩阵不等式,它给出了网络同步的充分条件.为了证实方法的有效性,进行了数值仿真.正如图1和2所示:网络的误差曲线迅速地收敛到零,也就是说整个网络达到了同步.同时,图2表明:耦合强度不同时,误差曲线渐近同步的速度也不一样.在理论允许的范围内,耦合强度越大,达到同步的速度越慢.总之,仿真结果证实了理论的有效性.

#### 参考文献:

[1] Dai Y, Cai Y Z, Xu X M. Synchronization criteria for complex dynamical networks with neutral - type coupling delay [J]. Physica A, 2008, 387: 4673 - 4682.

[2] 吕金虎. 复杂网络的同步理论、方法、应用与展望[J]. 力学进展, 2008, 38(6): 713 - 722.

[3] Liu Y Z, Jiang C S, Lin C S, et al. Chaotic Synchronization Secure Communications Based on the Lorenz Systems Switch [J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2009, 29(11): 2641 - 2644.

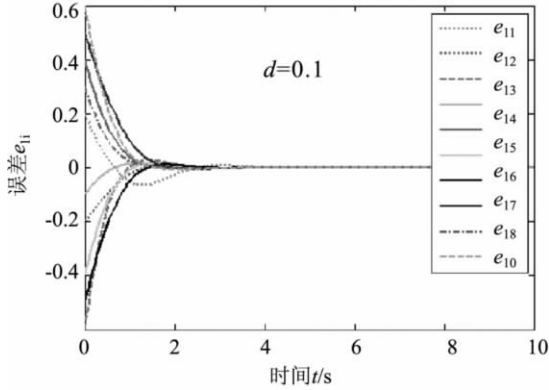


图2(a) 系统(16)中状态变量 $x_i$ 的误差曲线,其中耦合强度 $d=0.1$

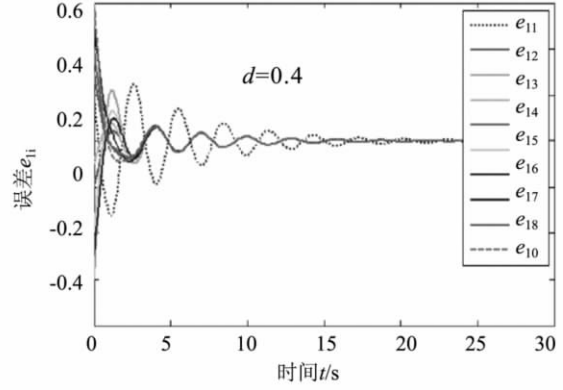


图2(b) 系统(16)中状态变量 $x_i$ 的误差曲线,其中耦合强度 $d=0.4$

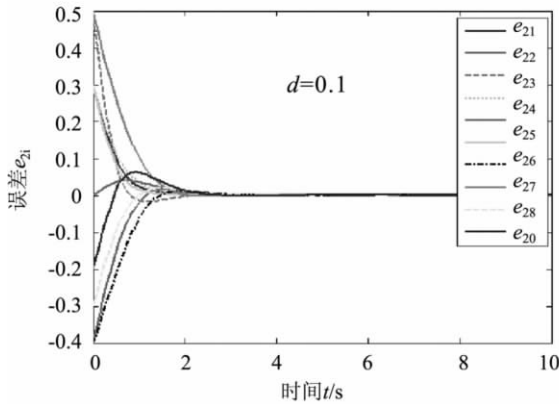


图2(c) 系统(16)中状态变量 $y_i$ 的误差曲线,其中耦合强度 $d=0.1$

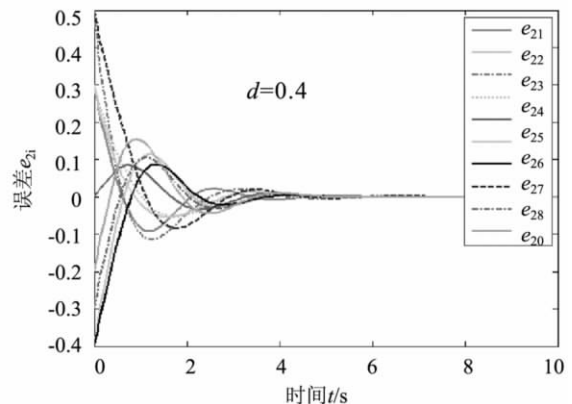


图2(d) 系统(16)中状态变量 $y_i$ 的误差曲线,其中耦合强度 $d=0.4$

图2 系统(16)的误差曲线,其中耦合强度分别为 $d=0.1$ 和 $d=0.4$

Fig.2 Error curves of systems (16), where coupling strengths are  $d=0.1$  and  $d=0.4$  respectively

[4] Ping L ,Zhang Y. Synchronization Analysis of Delayed Complex Networks with Time - varying Couplings [J]. Physica A , 2008 ,387: 3729 - 3737.

[5] Zhou J ,Lu Jun - an , Lü J H. Pinning Adaptive Synchronization of a General Complex Dynamical Network [J]. Automatica , 2008 ,61( 3): 338 - 342.

[6] Zhou J ,Xiang L ,Liu Z R. Synchronization in complex delayed dynamical networks with impulsive effects [J]. Physica A , 2007 ,384: 684 - 692.

[7] Liu H ,Luo Jun - an , Lü J H , et al. Structure identification of uncertain general complex dynamical networks with time delays [J]. Automatica 2009 45: 1799 - 1807.

[8] 孙伟刚. 复杂动力网络的同步分析与计算 [D]. 上海: 上海大学 ,2008 ,1 - 108.

[9] Wang Q Y ,Chen G R ,Lu Q S , et al. Novel criteria of synchronization stability in complex networks with coupling delays [J]. Physica A ,2007 ,378: 527 - 536.

[10] Hale J K ,Verduy Lunel S M. Introduction to Functional Differential Equations [M]. New York: Springer - Verlag , c 1993.