

# 改进的迎风格式和 R - K 法应用于对流方程的求解

孙 嵩, 宁 平

(昆明理工大学 环境科学与工程学院, 云南 昆明 650093)

摘要: 介绍了 2 种基于迎风格式和 Runge - Kutta 法而改进的微分方程差分格式, 这 2 种格式较传统方法在稳定性方面有明显提高, 此应用于求解对流方程, 改进的迎风格式适用于线性对流问题, 改进的 R - K 法可顺利计算非线性问题.

关键词: 对流方程; 迎风格式; 线性插值

中图分类号: O241.82 文献标识码: A 文章编号: 1007 - 855X(2007)05 - 0091 - 05

## Improved Upwind Scheme and R - K Method Applied in Solving Convection Equation

SUN Hao, N NG Ping

(Faculty of Environmental Science and Engineering, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, China)

Abstract: Based on upwind scheme and Runge-Kutta method, two new difference schemes improved for solving the convection equation are introduced. Compared with those traditional methods, the two schemes have been obviously enhanced in stability. They are used to solve convection equation experiment, improve upwind scheme fitting linear convection equation, and the latter can solve non-linear convection equation smoothly.

Key words: convection equation; upwind scheme; linear interpolation

### 0 引言

对流方程是一个描述既不含扩散和湍流等的理想流动和传播现象的方程. 理论或实际工程的应用中所使用到的诸多数学物理方程, 涉及如温度场、浓度场的推移, 流体波和悬移质的运动等, 往往含有对流方程. 现广泛使用的经典迎风格式和扩散问题中应用的 Runge - Kutta 法<sup>[5]</sup>在稳定性方面尚有改进余地. 本文讨论了基于此两格式而改进的 (一阶)迎风格式和 (m 阶)显隐加权 Runge - Kutta 格式, 明显提高了原法的稳定性, 增加了时间步长, 不仅适用于线性变参问题而且能够计算某些复杂的非线性对流问题, 这在数值模拟和工程应用中具有实际意义.

### 1 改进的迎风格式和 R-K 法应用于求解对流方程

#### 1.1 (一阶)迎风格式

$$\text{求解 (齐次) 对流方程: } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \\ u(z, 0) = u_0(z) \\ u(0, t) = 0(t), \text{ 或 } \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = 0(t) \quad (z_0 \leq z \leq z_1) \\ u(l, t) = 1(t), \text{ 或 } \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=1} = 1(t) \end{cases} \quad (1)$$

的 (一阶)迎风格式:

收稿日期: 2007 - 03 - 05.

第一作者简介: 孙 嵩 (1981 - ), 男, 在读硕士研究生. 主要研究方向: 固定床位值模拟. E - mail: disart\_sun@vip.sohu.com

$$U_j^{n+1} = (v - [v])U_{j-[v]-1}^n + ([v] + 1 - v)U_{j+[v]}^n; v = a \frac{t}{z} \tag{2}$$

当  $z$  和  $t$  分别是空间和时间尺度上的步长, 差分解  $U_j^n$  是对精确值  $u(j, z, n, t)$  的近似,  $j=0, 1, \dots, J$ ; 算符  $[v]$  表示不大于  $v$  的最大整数, 显然当  $v < 0$  时:

$$[v] = -[|v|] - 1 \tag{3}$$

对流方程 (1) 的理论解描述的是初值随时间的推移. 因为函数在特征线上的值相等, 在  $z-t$  平面上,  $(z, t)$  点处的函数值等于过该点的特征线交于  $t=0$  的  $z$  轴上某位置的初始函数的值, 所以如果推移速度  $a$  是常数, 特征线是直线, 理论解是  $u(z, t) = u_0(z - at)$ .

那么如使用格式 (2) 求解对流方程, 如图 1, 当  $a \geq 0$  时, 特征线为直线  $PQ$ ,  $P$  点上的差分解等于  $Q$  点上的  $u$  值, 而  $Q$  点的  $u$  值可由  $n$  时间层上各个空间节点的差分解近似计算得到. 而格式 (2) 就是用  $A_{m+1}$  和  $A_m$  两点上的近似解  $U_{j-m-1}^n$  和  $U_{j-m}^n$  的线性插值近似计算  $Q$  点上的  $u$  值. 为使  $Q$  点正好落在  $A_{m+1}$  和  $A_m$  两点中间, 要求  $m = [v]$ . 根据  $a$  的几何性质:  $QA_m = (v - m)z$ . 如令  $Q$  点坐标为  $(z, U_j^{n+1})$ ,  $A_{m+1}$  和  $A_m$  坐标分别是:  $((m+1-v)z, U_{j-m-1}^n)$  和  $(m-v)z, U_{j-m}^n$ . 格式 (2) 就是这些点线性内插的结果. 由 (3) 式可以验证当  $a < 0$  时的插值公式与此相同.

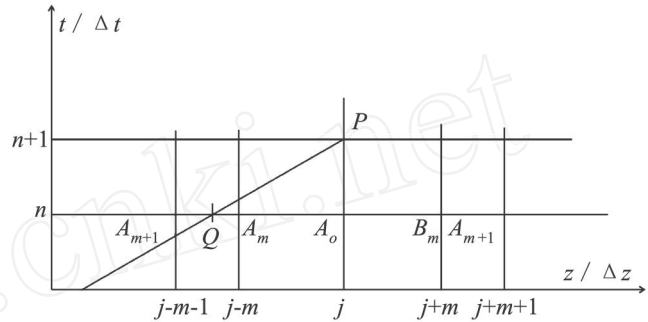


图1 通过线性插值构造差分格式

Fig.1 Construction of a difference scheme with linear interpolation

与传统迎风格式比较, 格式 (1) 的最大优点就在于它的无条件稳定性. 迎风格式的稳定条件要求  $v \leq 1$ , 对于  $a$  比较大的情况, 如果空间尺度的步长固定, 时间步长就必须取得足够小. 这就大大局限了时间步长的取法, 而在很多包含对流的偏微分问题中往往需要模拟持续长时间的过程, 这时就会暴露出传统迎风格式计算量大和耗费内存的缺点. 由于格式 (2) 为保证 CFL 条件<sup>[1]71~75</sup> 其插值点  $U_{j-m-1}^n$  和  $U_{j-m}^n$  随  $a$  的改变而改变, 这不仅使之稳定, 尤其放宽了对时间步长的要求, 而且在变参数对流问题中, 格式能够灵敏地适应参数因时间和位置的不同而不同的情况, 适合各种含变参对流项的其他偏微分方程, 如扩散方程等的计算.

当特征线与上一时间层交点过界时, 可直接使用上一时间层边界处的差分解近似代替当前的解: 当  $a > 0$  且  $j - [v] \leq 0$  或  $a < 0$  且  $j + [v] \geq J$  时, 分别令  $U_j^{n+1} = U_0^n$  或  $U_j^{n+1} = U_J^n$ .

### 1.2 (m 阶) 显隐加权 Runge-Kutta 格式

$$\text{求解一般常微分初始问题: } \begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), & x_0 \leq x \leq x_1 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{4}$$

的 (m 阶) 显隐加权 Runge-Kutta 格式:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + (1 - \alpha)h \sum_{j=1}^m c_j K_j(h, x_n, y_n) + \alpha h \sum_{j=1}^m c_j K_j(-h, x_{n+1}, y_{n+1}) \\ K_j(h, x, y) = f(x + a_j h, y + \sum_{k=1}^{j-1} b_{jk} K_k) \end{cases} \tag{5}$$

其中  $h$  是  $x$  的步长,  $a_j$  和  $b_{jk}$  是 R-K 法的参数<sup>[2,3]</sup>;  $K_1(h, x, y) = y(x, y)$ ;  $1/2 \leq \alpha \leq 1$ .

实际上, 格式 (5) 是梯形方法<sup>[2]340~343</sup> 和 R-K 法的组合, 所以这种格式就继承了梯形方法的高度稳定性, 也保持了 R-K 法的求解精度.

使用格式 (5) 求解对流方程 (1) 的基本思想是在每一个空间节点上解一个常微分方程, 如在第  $j$  个节

$$\text{点上它是: } \frac{du}{dt} = -\frac{a}{z} (u - U_{j-1}^{n+1} - (1 - \theta)U_{j-1}^n) \tag{6}$$

$n + 1$ 是当前时间层序号,  $0 < \theta < 1$ 是关于时间节点的隐式权重.

如用格式 (5)求解微分方程, (5)将是一个关于  $y_{n+1}$ 的代数方程,或者通过直接求  $y_{n+1}$ ,或者如若方程过于复杂则通过迭代计算出一个近似的  $y_{n+1}^*$ 依次一步一步计算 (1) [3]329~330.

### 1.3 两种格式在求解对流方程中的比较

使用两种方法分别计算初值条件为  $u(z, 0) = \exp[-10(4z - 1)^2]$  (7) 的对流问题 (1). 如图 2所示.

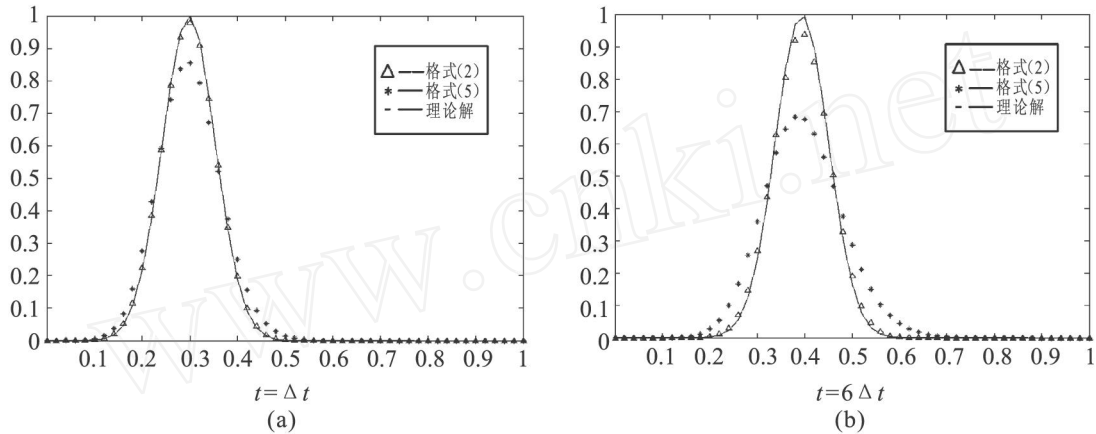


图2 使用2种格式解对流问题(1)和(7)  
Fig.2 A comparing of two schemes in solving convection equation (1) & (7)

从图 2能明显地看出格式 (2)要比格式 (5)更优,虽然理论上格式 (5)有更高的精度,但是这很可能主要是由于 (6)对函数  $u$ 的空间导数近似地比较粗糙,其次,由于  $a$ 为常数,在对 (6)关于  $t$ 泰勒展开后因系数为 0,当中的三次和三次以上的项都不存在,说明尽管可以增加格式 (5)的阶数  $m$ 达到任意精度,但对于常数的  $a, m$ 最多只能到 2阶.

的引入是对用 R - K法不太精确求解对流问题 [5]的一种改进, (6)中  $\theta$ 的意义在于调整并部分抵消相位误差,若它取 0,数值解将落后于理论解,因为在计算空间导数的过程中只用了上一个时间步的差分分解而造成相位的延迟,推迟了初值的推移过程;相反,若  $\theta = 1$ 解的波峰就会提前到来. 此算例中使用  $\theta = 0.62$

格式 (2)与格式 (5)都能顺利求解变参对流问题,其中格式 (2)只能求解当  $a$ 是关于  $z$ 和  $t$ 的函数的情况,而格式 (5)甚至还能求解非线性对流问题:  $a$ 可以是  $z, t$ 和  $u$ 的函数. 为了检验算法,我们试算了当  $a = 2.4(2u^{1/2} + 3z^2) \cos(80t)$ 的复杂情况下的对流初值问题 (1)和 (7),如图 3,仍有比较好的效果,这一点是格式 (2)无法比较的.

## 2 两种差分格式的收敛性理论

### 2.1 (一阶)迎风插值格式的相容性和收敛性

定理 1 对流方程 (1)的差分格式 (2)是收敛的.

实际上,格式 (1)是为满足 FCL条件而构造的算法,这就保证了差分分解的收敛性 [1]71~75,自然也就满足相容和稳定 [4]25. 为了进一步讨论其收敛的阶,下面详细分析了其稳定性.

### 2.2 (一阶)迎风插值格式的稳定性

定理 2 对流方程 (1)式的差分格式 (2)是无条件稳定的.

证明:用傅里叶分析 [1]74~75令  $U_j^n = \theta^n e^{i(jz)}$ ,  $i = k z$   $i$ 是虚数单位,代入格式 (2)中得到:

$$| \dots |^2 = 1 - 4([v](2v - [v] - 1) - v(v - 1)) \sin^2 \left( \frac{\dots}{2} \right) \dots \quad (8)$$

其中  $[v](2v - [v] - 1) \geq v(v - 1)$ , 这是因为如令  $f(v) = [v](2v - [v] - 1) - v(v - 1)$ , 可立即验证  $f(v)$  对任意整数  $n$  的周期性:  $f(v) = f(v + n)$ , 故仅需考查  $v$  在  $[0, 1)$  内的情况:  $f(v) = 0 - v(v - 1) \geq 0$  有  $| \dots |^2 \leq 1$ . 据 Von Neumann 条件<sup>[1,4]</sup> 格式 (2) 无条件稳定.

直观地讲, 如使用差分格式计算 1 个波的推移, 在推移的过程中其振幅会随着推移而改变, 这种误差是振幅误差. 从 (8) 式中看到振幅误差是  $O(\Delta t^2)$  阶. 在使用差分方法解 (1) 式时还会产生相位误差, 可以解释为在 1 个波的推移中差分分解会随推移而偏离理论的相位, 使波在各点上的前进或快或慢. 为考查格式 (2) 式相位误差的阶, 现用泰勒展式得到:

$$\text{Arg}(\dots) \sim \left[ v - \frac{2}{6} \left( v - [v] \right) \left( 1 - (v - [v]) \right) \left( 1 - 2(v - [v]) \right) + \dots \right]$$

其相位误差是  $O(\Delta t^2)$ .

2.3 (m 阶) 显隐加权 Runge-Kutta 格式的相容性

与一般 R - K 法类似, 由  $y$  的连续性容易得到<sup>[3]345</sup>:

定理 3 当  $f$  连续, 格式 (5) 与微分方程 (4) 式是相容的.

2.4 (m 阶) 显隐加权 Runge - Kutta 格式的绝对稳定区间和稳定性

格式 (5) 是常微分方程的差分算法, 对于常微分方程差分格式稳定性的考察, 应将格式作用到特殊的方程:

$$\frac{dy}{dx} = -y, \text{Re}(\lambda) < 0 \quad (9)$$

研究差分格式关于该方程的增长因子, 使增长因子的模小于 1 的  $\lambda$  所在复平面中区域叫绝对稳定域, 当中负半轴的部分叫做绝对稳定区间, 在绝对稳定域内格式绝对稳定.

鉴于格式 (5) 不仅在一般常微分问题而且在可能由此派生出的诸多类似 (6) 式的偏微分方程中数值计算和模拟方面的应用, 我们详细证明了其良好的稳定性.

定理 4 格式 (5) 的绝对稳定区间是  $(-\infty, 0)$ .

证明: 首先求出  $m$  阶格式 (5) 的增长因子  $A_m$ : 用一般 R - K 法解方程 (9) 式时可以证明<sup>[3]358</sup>:

$$1 + h \sum_{j=1}^m c_j K_j(h, x, 1) = 1 + h \sum_{j=1}^m c_j K_j(h, 1) = \sum_{j=0}^m \frac{(h)^j}{j!}$$

再由方程 (9) 式的特点算出:  $y_n + h \sum_{j=1}^m c_j K_j(h, y_n) = (1 + h \sum_{j=1}^m c_j K_j(h, 1)) y_n$ ,

故用格式 (5) 解方程 (9) 式时可以求出:

$$A_m = \frac{A_m}{B_m} = \frac{\sum_{j=0}^m \frac{(h)^j}{j!}}{(1 - h) + \sum_{j=0}^m \frac{(-h)^j}{j!}}$$

现对  $m$  使用归纳法. 当  $m = 1$  易证命题成立. 令  $m = k$  且  $h$  取自实数时  $h^k < 1$ ; 所以当  $m = k + 1$ :  $h^{k+1} < 1$

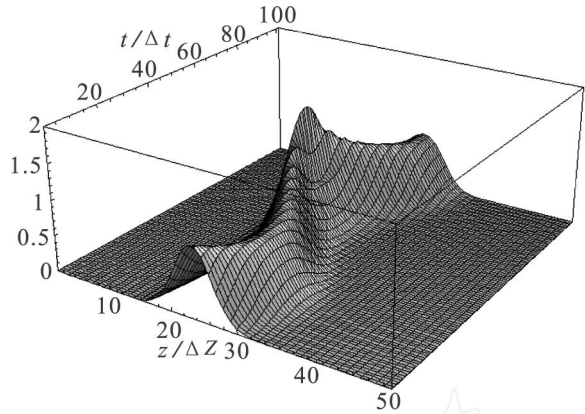


图3 使用格式(5)试解非线性对流问题  
Fig.3 Solving non-linear convection equation with the scheme (5)

$$= \left[ \frac{A_k + (1 - \theta) \frac{(h)^{k+1}}{(k+1)!}}{B_k + \frac{(-h)^{k+1}}{(k+1)!}} \right], \text{用此式的分母减去其分子: } B_k^2 - A_k^2 + 2[(1 - \theta)^{k+1} B_k - A_k(1 - \theta)] \frac{(h)^{k+1}}{(k+1)!}$$

$$+ (2 - 1) \left( \frac{|h|^{k+1}}{(k+1)!} \right)^2 > 2[(1 - \theta)^{k+1} B_k - A_k(1 - \theta)] \frac{(h)^{k+1}}{(k+1)!} = 2D_k, \text{对 } D_k \text{ 分 } k \text{ 的奇偶讨论, 当 } k \text{ 为}$$

偶数时:

$$D_k = \left[ -2(1 - \theta) + \sum_{l=0}^{k/2} (2(1 - \theta) - 1) \frac{(h)^{2l}}{(2l)!} + \sum_{l=1}^{k/2} (2 - 1) \frac{(h)^{2l-1}}{(2l-1)!} \right] \frac{(h)^{k+1}}{(k+1)!} =$$

$$\frac{|h|^{k+1}}{(k+1)!} + \sum_{l=1}^{k/2} (2 - 1 + (2(1 - \theta) - 1) \frac{h}{2l}) \frac{(h)^{6l-2}}{(2l-1)! (k+1)!}.$$

由  $1/2 < \theta < 1$  可证  $D_k > 0$ ; 当  $k$  为奇数:  $D_k = D_{k-1} + h(2(1 - \theta) - 1) \frac{(h)^{2k}}{k!(k+1)!}$  由  $1/2 < \theta < 1$  而且  $D_{k-1} > 0$ , 明显  $D_k > 0$  所以  $|k+1|^{-2} < 1$ , 故而 取自整个负实轴, 格式 (5) 皆稳定.

### 2.5 显隐加权 Runge - Kutta 格式收敛性

进一步, 类似于 R - K 法收敛性的证明<sup>[3]</sup> 我们不难得到:

定理 5 当  $f$  满足 Lipschitz 条件时格式 (5) 对常微分初值问题 (4) 式是收敛的.

## 3 问题的进一步讨论

### 3.1 构造更高阶迎风插值格式的必要性

正如 1.1 所述, 求解 (1) 的差分格式是利用上一个时间层某点处  $u$  值的近似来代替当前时间层上的  $u$  值, 人们自然会想到构造更高阶的插值来近似图 1 中  $Q$  点的  $u$  值, 以达到更高精度, 但是下面的分析表明这并不必要, 因为高阶的插值并不一定稳定.

如图 1 如果使用  $A_s, s=0, 1, \dots, m+1$  左边的所有点来插值求解  $Q$  点的  $u$  值, 比如当  $\nu$  的取值还不必很大:  $\nu=2.5$ , 格式就不稳定:  $1 - \nu^2 = -\frac{5}{8}(\cos \theta + 1) \sin^4 \frac{\theta}{2} < 0$ .

再如, 类比著名的 Lax - Wendroff 格式<sup>[1]80-83</sup>, 用  $A_s$  以及  $B_s, s=0, 1, \dots, m+1$  左右两边的点来插值计算  $Q$  点  $u$  值, 仅  $\nu = \sqrt{3}$  便出现不稳定:  $1 - \nu^2 = -\frac{8}{3}(\cos \theta + 1) \sin^4 \frac{\theta}{2} < 0$ .

### 3.2 (m 阶) 显隐加权 Runge - Kutta 格式的绝对稳定域

当  $m=1$  时格式 (5) 就是变权重的梯形方法<sup>[2]340-343</sup>, 虽然梯形方法的绝对稳定域是整个左复半平面, 但是格式 (5) 在左复半平面中某些区域仍不稳定, 本文给出了当  $m=16$  时  $h$  在复平面  $[-20, 0] \times [-15i, 15i]$  范围内的绝对稳定域图, 如图 4 中阴影部分.

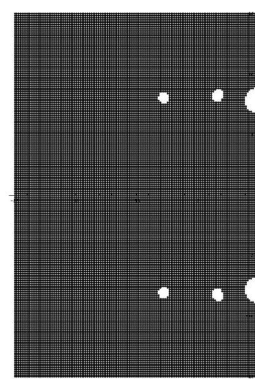


图4  $\theta=1/2$ 时16阶格式(5)的绝对稳定域  
Fig4. Map of absolute stability field for scheme (5) when  $m=16$  &  $\theta=1/2$

### 参考文献:

[1] KW Morton, D FMayers Numerical Solution of Partial Differential Equations[M]. Cambridge University Press in 2005: 71 - 83.

[2] 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2003: 340 - 345.

[3] 奚梅成, 刘儒勋. 数值分析方法 [M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2004: 318 - 358.

[4] 李德元, 陈光南. 抛物型方程差分法引论 [M]. 北京: 科学出版社, 1994: 25.

[5] 宁平, 陈亚雄, 李柳琼, 等. 低浓度甲苯在固定床活性炭上的吸附及其数值模拟 [J]. 化工环保, 1999(5): 259 - 263.

[6] 袁雄燕, 杨国录. 对流方程数值解法比较及分析研究 [J]. 泥沙研究, 2004(1): 35 - 42.