

方差分量模型中回归系数的线性估计的可容许性

吴刘仓¹, 李会琼²

(1. 昆明理工大学 理学院, 云南 昆明 650093; 2. 云南师范大学 数学学院, 云南 昆明 650092)

摘要: 考虑方差分量模型 $EY = X\beta$, $COV(Y) = \sum_{i=1}^m \theta_i V_i$, 其中 $n \times p$ 矩阵 X 和非负定矩阵 $V_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 都是已知的, $\beta \in R^p$, $\theta_i \geq 0$ 或 $\theta_i > 0 (i = 1, 2, \dots, m)$ 均为参数. 在本文中, 我们在二次损失下, 当 $\mu(V_1: V_2: \dots: V_m: X) = R^n$ 时, 给出了关于可估函数 $S\beta$ 的线性估计在线性估计类中可容许性的充要条件.

关键词: 可容许性; 线性回归; 线性模型

中图分类号: 212.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-855X(2004)05-0140-04

Admissibility of Linear Estimators of Regression Coefficient in a Variance Component Model

WU Liu-cang¹, LI Hui-qiong²

(1. Faculty of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, China;

2. Faculty of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming 650092, China)

Abstract: The variance component model $EY = X\beta$, $COV(Y) = \sum_{i=1}^m \theta_i V_i$, where $X: n \times p$ and $V_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, m)$ are known, and $\beta \in R^p$, $\theta_i \geq 0$ and $\theta_i > 0 (i = 1, 2, \dots, m)$ are parameters. When $\mu(V_1: V_2: \dots: V_m: X) = R^n$, the sufficient and necessary conditions for a linear estimable estimator of $S\beta$ to be admissible in the class of all linear estimators are given under quadratic loss function.

Key words: admissibility; linear regression; liner model

0 引言

对于方差分量模型

$$\begin{cases} EY = X\beta \\ COV(Y) = \sum_{i=1}^m \theta_i V_i \end{cases} \quad (1)$$

其中 X 为已知的 $n \times p$ 阶矩阵, $V_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$ 已知, $\beta \in R^p, \theta_i \geq 0$ 或 $\theta_i > 0, i = 1, 2, \dots, m$ 都是参数. 我们要估计线性可估函数 $S\beta, S$ 为已知的 $k \times p$ 阶矩阵, 选取估计类:

$L_1 = \{LY: L \text{ 为 } k \times n \text{ 阶矩阵}\}$

$L_2 = \{LY + a: L \text{ 为 } k \times n \text{ 阶矩阵}, a \in R^k\}$

取损失函数为二次损失函数:

$$L(d, S\beta) = (d - S\beta)'(d - S\beta) \quad (2)$$

关于模型(1), 在二次损失函数(2)及 $X\beta$ 的 Gauss - Markoff 估计存在的假定下, 1987年叶慈南^[1]在 $V_i > 0 (i = 1, 2, \dots, m)$ 和 $X = I_n$, 给出 $q'Y (q \text{ 为 } n \text{ 维向量})$ 是 $p'\beta$ 在齐次线性估计类中可容许的一个必要条件和充分条件; 1990年侯景臣^[2]在二次损失下, 当 $k = 1$ 时, 给出了 LY 在 L_1 中是 $S\beta$ 的容许估计的

收稿日期: 2004-01-04.

第一作者简介: 吴刘仓(1976.3~), 男, 在读博士研究生, 讲师. 主要研究方向: 数理统计.

充要条件;当 $k > 1$ 时,只给出了 LY 在 $L_1(LY + a$ 在 $L_2)$ 中是 $S\beta$ 的容许估计的一个充分条件;1991年徐兴忠^[3]将这一问题深入研究,给出了在 L_1 (在 L_2) 中是 $S\beta$ 的容许估计的充要条件.

去掉 $X\beta$ 的 Gauss - Markoff 估计的存在之假定,1998年孙卓昕、徐兴忠^[5]在 $V = \sum_{i=1}^m V_i > 0$ 及二次损失(2)下,给出了 LY 在 $L_1(LY + a$ 在 $L_2)$ 中是 $S\beta$ 的容许估计的充要条件,运用此结果,得到了共同均值模型中 $S\beta$ 线性估计在线性估计类中是可容许估计的充要条件.本文在模型(1)和损失函数(2)下,当 $\mu(V_1 : V_2 : \dots : V_m : X) = R^n$ 时,得出了 LY 在 $L_1(LY + a$ 在 $L_2)$ 中是 $S\beta$ 的可容许估计的充要条件.

1 主要结果及证明

1.1 L_1 中的可容许性

定义1 设 \mathcal{B} 是 R^n 的非空子集.如果对任意的 $x, y \in \mathcal{B}$ 和实数 $a \in (0, 1)$ 都有 $ax + (1-a)y \in \mathcal{B}$, 则称 \mathcal{B} 为 R^n 中的凸集

引理1 设

$$\begin{aligned} W_i &= \{M : \text{tr}MV_iM' \leq \text{tr}LV_iL'\} \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ \Omega &= \{M : (MX - S)'(MX - S) \leq (LX - S)'(LX - S)\} \end{aligned}$$

则 W_i, Ω 皆为凸集, $i = 1, 2, \dots, m$.

证明:由凸集定义,可得.

引理2 在模型(1)和损失函数(2)下,设 $S\beta$ 可估, $\mu(V_1 : V_2 : \dots : V_m : X) = R^n$, 则 LY 在 L_1 中是

$S\beta$ 的可容许估计的充要条件是 $(\bigcap_{i=1}^m W_i) \cap \Omega = \{L\}$.

证明: LY 在 L_1 中是 $S\beta$ 的可容许估计

\Leftrightarrow 不存在 M , 使 MY 优于 LY

\Leftrightarrow 不存在 M , M 满足

$$\begin{cases} \text{tr}MV_iM' \leq \text{tr}LV_iL', i = 1, 2, \dots, m \\ (MX - S)'(MX - S) \leq (LX - S)'(LX - S) \end{cases} \quad (3)$$

且使(3)中 $m + 1$ 个不等式至少有一个不成立等号.

充分性:若 $(\bigcap_{i=1}^m W_i) \cap \Omega = \{L\}$, 则不存在不等于 L 的 M 满足(3), 则 LY 可容许.

必要性:反证法.假设存在 $L_1 \neq L, L_1 \in (\bigcap_{i=1}^m W_i) \cap \Omega$

则

$$\begin{aligned} \text{tr}\left(\frac{L+L_1}{2}\right)V_i\left(\frac{L+L_1}{2}\right)' &= \frac{1}{2}(\text{tr}LV_iL' + \text{tr}L_1V_iL'_1) - \frac{1}{4}\text{tr}(L-L_1)V_i(L-L_1)' \\ &\leq \text{tr}LV_iL' \end{aligned}$$

当且仅当 $(L-L_1)V_i \neq 0$ 时,有

$$\text{tr}\left(\frac{L+L_1}{2}\right)V_i\left(\frac{L+L_1}{2}\right)' < \text{tr}LV_iL' \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

又

$$\begin{aligned} & \left(\frac{L+L_1}{2}X - S\right)' \left(\frac{L+L_1}{2}X - S\right) \\ &= \frac{1}{2}(LX - S)'(LX - S) + \frac{1}{2}(L_1X - S)'(L_1X - S) - \frac{1}{4}(L_1X - LX)'(L_1X - LX) \\ &\leq (LX - S)'(LX - S) \end{aligned}$$

当且仅当 $(L_1 - L)X \neq 0$ 时,有

$$\left(\frac{L+L_1}{2}X - S\right)' \left(\frac{L+L_1}{2}X - S\right) < (LX - S)'(LX - S)$$

由已知 $\mu(V_1 : V_2 : \dots : V_m : X) = R^n$, 又 $L_1 \neq L$, 故 $(L_1 - L)(V_1 : V_2 : \dots : V_m : X) = 0$, 因而必存在 i , 有 $(L_1 - L)V_i \neq 0$ 或者 $(L_1 - L)X \neq 0$, 所以有 $\frac{L+L_1}{2}Y$ 优于 LY , 与 LY 的可容许性矛盾. 引理证毕.

定理 1 在模型(1)和损失函数(2)下, 设 $S\beta$ 可估, $\mu(V_1 : V_2 : \dots : V_m : X) = R^n$, 则 LY 在 L_1 中是 $S\beta$ 可容许估计的充要条件为:

1° 存在 $\{1, 2, \dots, m\}$ 的一个分割 J_1, J_2, \dots, J_{m_0} 及 $\alpha > 0, i = 1, 2, \dots, m$, 使

$$(S - LX)(X'X)^+ X'V_{J_1}L' \geq 0 \text{ (意含对称)},$$

$$(I - P_X)V_{J_1}L' = 0,$$

$$P_2(S - LX)(X'X)^+ X'[I - V_{J_1}G_1^-(1 - P_X)V_{J_1}L'P_2] \geq 0 \text{ (意含对称)},$$

$$(I - P_X)[I - V_{J_1}G_1^-(I - P_X)]V_{J_2}L' = 0,$$

.....

$$P_{m_0}(S - LX)(X'X)^+ X'[I - (V_{J_1} + \dots + V_{J_{m_0-1}})G_{m_0-1}^-(I - P_X)]V_{J_{m_0}}L'P_{m_0} \geq 0 \text{ (意含对称)},$$

$$(I - P_X)[I - (V_{J_1} + \dots + V_{J_{m_0-1}})G_{m_0-1}^-(I - P_X)]V_{J_{m_0}}L' = 0,$$

2° $MV = LV$, 则 $M = L$.

其中 V_{J_i}, P_i, G_i 的意义为

$$V_{J_i} = \sum_{j \in J_i} \alpha_j V_j, i = 1, 2, \dots, m_0. G_i = (I - P_X)(V_{J_1} + \dots + V_{J_i}),$$

$$i = 1, 2, \dots, m_0 - 1, P_X = X(X'X)^+ X'$$

若记 \tilde{P}_i 为到 $\mu[(S - LS)(X'X)^+ X'(V_{J_1} + \dots + V_{J_i})(I - G_i^-G_i)]$ 上的正交投影, 则

$$P_i = I - \tilde{P}_{i-1}, i = 2, \dots, m_0.$$

证明: 必要性. 必要条件 1° 的证明与文[5]中定理 1 相类似, 只须注意利用引理 2 即可.

现用反证法证明必要条件 2°.

若 $M \neq L$, 但 $MV = LV$, 由 $MV = LV$, 可得

$$(M - L)V = 0$$

$$(M - L)V(M - L)' = 0$$

$$(M - L)V_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

$$MV_i = LV_i \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

又因为 $\mu(V_1 : V_2 : \dots : V_m : X) = R^n$, 所以, 存在 $i, M \neq L$ 时, $(M - L)V_i \neq 0$ 或 $(M - L)X \neq 0$, 而 $(M - L)V_i = 0, i = 1, 2, \dots, m$. 所以 $(M - L)X \neq 0$.

而

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}\left(\frac{M+L}{2}\right)V_i\left(\frac{M+L}{2}\right)' &= \frac{1}{2}(\operatorname{tr}LV_iL' + \operatorname{tr}MV_iM') - \frac{1}{4}\operatorname{tr}(M-L)V_i(M-L)' \\ &= \operatorname{tr}LV_iL' \end{aligned}$$

所以

$$\operatorname{tr}\left(\frac{M+L}{2}\right)V_i\left(\frac{M+L}{2}\right)' = \operatorname{tr}LV_iL'$$

又

$$\left(\frac{M+L}{2}X - S\right)' \left(\frac{M+L}{2}X - S\right)$$

$$= \frac{1}{2}(LX - S)'(LX - S) + \frac{1}{2}(MX - S)'(MX - S) - \frac{1}{4}(MX - LX)'(MX - LX) \\ \leq (LX - S)'(LX - S)$$

而

$$(M - L)X \neq 0$$

所以

$$\left(\frac{M+L}{2}X - S\right)' \left(\frac{M+L}{2}X - S\right) < (LX - S)'(LX - S)$$

有 $\frac{M+L}{2}Y$ 优于 LY , 与 LY 的可容许性矛盾, 必要性得证.

充分性: 若存在 M 使 MY 优于 LY , 则由必要条件 1° 可得(与文[5]中定理 1 的充分性证法相同)

由必要条件 2° 可得

$M = L$. 充分性得证.

1.2 L_2 中的可容许性

定理 2 在模型(1)和损失函数(2)下, 设 $S\beta$ 可估, 且 $\mu(V_1 : V_2 : \dots : V_m : X) = R^n$, 则 $LY + a$ 在 L_2 中是 $S\beta$ 的可容许估计的充要条件为:

- 1) L 满足定理 3 中条件 1° 与 2°;
- 2) $a \in \mu(LX - S)$.

证见[3]中定理 2 的证明.

参考文献:

- [1] 叶慈南. 方差分量模型中回归系数的估计的可容许性[J]. 应用概率统计, 1993, 9(4): 337 ~ 341.
- [2] 侯景臣. 方差分量模型中回归系数的线性估计的可容许性的若干结果[J]. 应用概率统计, 1990, 6(1): 22 ~ 32.
- [3] 徐光忠. 二次损失下方差模型中回归系数线性估计的可容许性[J]. 系统科学与数学, 1993, 13(14): 363 ~ 369.
- [4] 王学仁, 詹金龙, 陈建宝. 方差分量线性模型中回归系数和参数的所有可容许线性估计[J]. 数学学报, 1994, 37(5): 653 ~ 662.
- [5] 孙卓昕, 徐兴忠. 二次损失下方差分量模型中回归系数的线性容许估计[J]. 应用数学学报, 1998, 2(3): 393 ~ 403.
- [6] 王松桂. 线性模型的理论及应用[M]. 合肥: 安徽教育出版社, 1987.