最小二乘估计的有效性

吴刘仓，黄文亮，詹金龙
(昆明理工大学 理学院，云南 昆明 650093)

摘要：对Gauss-Markov模型，本文考虑了最小二乘估计有效性的三种度量，并给出了它们的界.

关键词：Gauss-Markov模型；最小二乘估计；Gauss-Markov估计；有效性
中图分类号：O212.7　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1007-855X(2001)02-101-07

1 引言与主要结果

为方便起见，本文采用下述记号，对矩阵 $A, A^+, R(A)$ 与 $\mathrm{rank}(A)$ 分别记 A 的 Moore-Penrose 逆，A 的列空间与 A 的秩；而 $\mathrm{tr}(A)$ 表示方阵 A 的迹. 对对称阵 $A, A \ge 0 (A > 0)$ 表示 A 非负定(正定)；$\lambda_i(A)$ 表示 A 的第 i 个顺序特征根.

本文讨论 Gauss-Markov 模型.

$$Y = X\tau + e, E(e) = 0, \mathrm{cov}(e) = \sigma^2\Sigma \tag{1}$$

这里 Y 为 $n\times 1$ 的观测向量，X 为 $n\times p$ 的设计阵，τ 为 $p\times 1$ 的未知参数向量，e 为 $n\times 1$ 的随机误差向量，$\sigma^2 > 0$ 是未知参数，$\Sigma > 0$ 已知.

记 $\mu = E(Y) = X\tau$，则 μ 的最小二乘估计(LS 估计)与 Gauss-Markov 估计(G-M 估计)分别为 $\hat{\mu} = PY$ 与 $\tilde{\mu} = X(X'\Sigma^{-1}X)^+X'\Sigma^{-1}Y$，此处 $P = X(X'X)^+X'$. 一般来说，G-M 估计 $\tilde{\mu}$ 的计算非常复杂，因此人们常用 LS 估计 $\hat{\mu}$ 来替代 G-M 估计 $\tilde{\mu}$，这便促使人们去研究 LS 估计 $\hat{\mu}$ 与 G-M 估计 $\tilde{\mu}$ 之间的关系.

关于 $\hat{\mu}$ 与 $\tilde{\mu}$，有下述重要结果.

引理1　$\hat{\mu} = \tilde{\mu}$ 当且仅当 $P\Sigma^2P = (P\Sigma P)^2$

引理2　记 $\theta = I - P$ 则

$$\tilde{\mu} = \hat{\mu} - P\Sigma\theta(\theta\Sigma\theta)^+\theta Y$$

引理1是众所周知的，现证引理2，令 $\bar{\mu} = \hat{\mu} - P\Sigma\theta(\theta\Sigma\theta)^+\theta Y$，则 $\bar{\mu}$ 是 μ 的一个线性无偏估计，设 $\tilde{o}$ 是 n 维零向量的任一线性无偏估计，则存在矩阵 M，使 $\tilde{o} = M\theta Y$，于是

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(\bar{\mu}, \tilde{o}) &= \mathrm{cov}(\bar{\mu}, M\theta Y) = \mathrm{cov}(\bar{\mu}, M\theta Y) - \mathrm{cov}(P\Sigma\theta(\theta\Sigma\theta)^+\theta Y, M\theta Y)\\ &= \sigma^2P\Sigma\theta M' - \sigma^2P\Sigma\theta(\theta\Sigma\theta)^+\theta\Sigma\theta M' = \sigma^2P\Sigma\theta M' - \sigma^2P\Sigma\theta M'\\ &= 0\end{aligned}$$

根据 Rao 的引理(1968)，$\bar{\mu}$ 是 μ 的一个 G-M 估计，从而由 G-M 估计的唯一性知 $\bar{\mu} = \tilde{\mu}$，引理2证毕.

关于 LS 估计 $\hat{\mu}$ 与 G-M 估计 $\tilde{\mu}$ 关系的研究，主要集中在两个问题上，其一是寻求 $\hat{\mu} = \tilde{\mu}$ 的充要条件(参见[6, 7, 10])，其二是研究 $\hat{\mu}$ 与 $\tilde{\mu}$ 之间的差异.

研究 $\hat{\mu}$ 与 $\tilde{\mu}$ 之差异的第一类方法自然是直接研究 $\hat{\mu}$ 与 $\tilde{\mu}$ 之间的差异(参见[1, 2, 4])，Baksalary

收稿日期：2000-10-18；
第一作者简介：吴刘仓(1976～)，男，硕士；主要研究方向：参数估计的可容许性与有效性.

(1980)研究了$\|\hat{\mu}-\tilde{\mu}\|$，并证明了

$$\|\hat{\mu}-\tilde{\mu}\| \le (v_0^{1/2}/\lambda_0)\|Y-\hat{\mu}\| \tag{2}$$

其中$\|\bullet\|$表示Euclid向量范数，v_0是$P\Sigma^{-1}\theta\Sigma^{-1}P$的最大特征根，$\lambda_0$是$P\Sigma^{-1}P$的最小特征根. 本文继续研究$\|\hat{\mu}-\tilde{\mu}\|$，并给出了一个新的上界.

定理1
$$\|\hat{\mu}-\tilde{\mu}\| \le \frac{\lambda_1-\lambda_m}{2\sqrt{\lambda_1\lambda_m}}\|Y-\hat{\mu}\| \tag{3}$$

其中$\lambda_1 \ge \cdots \ge \lambda_n$是$\Sigma$的特征根.

研究$\hat{\mu}$与$\tilde{\mu}$之差异的第二类方法是通过$\hat{\mu}$与$\tilde{\mu}$的等价关系来间接研究(参见[3-5,8,9]). 这就是人们常说的LS估计的有效性问题. 根据引理2，我们有

$$\mathrm{cov}(\hat{\mu}-\tilde{\mu})=\sigma^2 P\Sigma\theta M(\theta\Sigma\theta)^+\theta\Sigma\theta(\theta\Sigma\theta)^+\theta\Sigma P=\sigma^2 P\Sigma\theta(\theta\Sigma\theta)^+\theta\Sigma P$$

于是$\hat{\mu}=\tilde{\mu}$当且仅当$\mathrm{tr}(P\Sigma\theta(\theta\Sigma\theta)^+\theta\Sigma P)=0$，基于这个理由，我们用$\mathrm{tr}(P\Sigma\theta(\theta\Sigma\theta)^+\theta\Sigma P)$来度量LS估计的有效性，并证明了

定理2 设$\mathrm{rank}(X)=r$，则有

$$tr(P\Sigma\theta(\theta\Sigma\theta)^+\theta\Sigma P) \le \frac{1}{4\lambda_n}\sum_{i=1}^{m}(\lambda_i-\lambda_{n-i+1})^2 \tag{4}$$

其中$m=\min\{r,n-r\},\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_n$是$\Sigma$的特征根.

根据引理1，可通过$P\Sigma^2P$与$(P\Sigma P)^2$之间的差异来度量$\hat{\mu}$与$\tilde{\mu}$之间的差异. Bloomfield and Watson (1975)用$\mathrm{tr}\{P\Sigma^2P-(P\Sigma P)^2\}$来度量LS估计的有效性，并证明了

$$0 \le \mathrm{tr}\{P\Sigma^2P-(P\Sigma P)^2\} \le \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{m}(\lambda_i-\lambda_{n-i+1})^2 \tag{5}$$

其中$m=\min\{r,n-r\},r=\mathrm{rank}(X)$，本文用$\mathrm{tr}(P\Sigma P)^2/\mathrm{tr}(P\Sigma^2P)$来度量LS估计的有效性，并获得了

定理3 设$\mathrm{rank}(X)=r$，则有

$$\frac{4\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\lambda_{n-i+1}}{\sum_{i=1}^{m}(\lambda_i+\lambda_{n-i+1})^2} \le \frac{\mathrm{tr}(P\Sigma P)^2}{\mathrm{tr}(P\Sigma^2P)} \le 1 \tag{6}$$

其中$m=\min\{r,n-r\}$, $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_n$是$\Sigma$的特征根.

2 定理的证明

为完成定理的证明，我们再介绍两个引理.

引理3 设A为n阶对称阵，则有

$$\mathrm{tr}(A^2) \ge (\mathrm{tr}A)^2/n \tag{7}$$

证明 取正交阵N使$NAN'=\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，令$a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)',b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)'$，则由Gauchy-Schwarz不等式得

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

取 $b_i = 1, i = 1,2,\cdots,n$ ，则有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \le n\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)$$

即

$$\mathrm{tr}(A^2) \ge (\mathrm{tr}A)^2 / n$$

于是引理得证.

引理 4　设 H 是 $n \times r$ 的列正交阵，则有 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n), \lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_n > 0$ 则有

$$1 \le \frac{\mathrm{tr}(H'\Lambda^2 H)}{\mathrm{tr}(H'\Lambda H)^2} \le \frac{\sum_{i=1}^{m}(\lambda_i + \lambda_{n-i+1})^2}{4\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\lambda_{n-i+1}} \tag{8}$$

其中 $m = \min\{r, n-r\}$.

证明　注意到 $(I - HH') \ge 0$ ，有

$$H'\Lambda^2 H - (H'\Lambda H)^2 = H'\Lambda^2 H - H'\Lambda HH'\Lambda H = H'\Lambda(I - HH')\Lambda H \ge 0$$

于是

$$\mathrm{tr}(H'\Lambda^2 H) \ge \mathrm{tr}(H'\Lambda H)^2$$

等价地

$$\frac{\mathrm{tr}(H'\Lambda^2 H)}{\mathrm{tr}(H'\Lambda H)^2} \ge 1$$

另一方面，根据引理 3 ，有

$$\frac{\mathrm{tr}(H'\Lambda^2 H)}{\mathrm{tr}(H'\Lambda H)^2} \le \frac{r\mathrm{tr}(H'\Lambda^2 H)}{[\mathrm{tr}(H'\Lambda H)]^2} \tag{9}$$

考虑对数 Lagrange 表达式

$$\ln\mathrm{tr}(H'\Lambda^2 H) - 2\ln\mathrm{tr}(H'\Lambda H) - \mathrm{tr}\{U(H'H) - I\} \tag{10}$$

其中 U 为对称的 Lagrange 乘数矩阵，记 $a = \mathrm{tr}(H'\Lambda^2 H), b = \mathrm{tr}(H'\Lambda H)$ ，则有

$$\frac{\partial \ln a}{\partial H} = a^{-1}H'\Lambda^2,\quad \frac{\partial \ln b}{\partial H} = b^{-1}H'\Lambda^2,\quad \frac{\partial \mathrm{tr}[U(H'H - I)]}{\partial H} = UH'$$

于是,(10) 式各项对 H 求导并令其等于零即得

$$a^{-1}H\Lambda^2 - 2b^{-1}H'\Lambda = UH' \tag{11}$$

右乘 H 得

$$a^{-1}H'\Lambda^2 H - 2b^{-1}H'\Lambda H = U \tag{12}$$

将 (12) 式代入 (11) 式得

$$a^{-1}H'\Lambda^2 - 2b^{-1}\Lambda = (a^{-1}H'\Lambda^2 H - 2b^{-1}H'\Lambda H)H' \tag{13}$$

右乘 ΛH 得

$$a^{-1}H'\Lambda^3 H - 2b^{-1}H'\Lambda^2 H = a^{-1}H'\Lambda^2 HH'\Lambda H - 2b^{-1}(H'\Lambda H)^2$$

这表明$(H'\Lambda^2H)(H'\Lambda H)$为对称阵，于是$H'\Lambda^2H$与$H'\Lambda H$之积可交换，从而存在正交阵$V$使

$$\begin{cases} H'\Lambda^2H = VAV' \\ H'\Lambda H = VBV' \end{cases} \tag{14}$$

其中$A=\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_r), B=\mathrm{diag}(b_1,b_2,\cdots,b_r)$，记$W=HV$，则由(13)式得

$$a^{-1}W'\Lambda^2 - 2b^{-1}W'\Lambda = a^{-1}AW' - 2b^{-1}BW'$$

用$(w_1,w_2,\cdots,w_n)$表示W'的第i行，则有

$$a^{-1}w_j\lambda_j^2 - 2b^{-1}w_j\lambda_j = a^{-1}a_iw_j - 2b^{-1}b_iw_j,\quad j=1,2,\cdots,n$$

于是$w_1,w_2,\cdots,w_n$中至多有两个不为零，分两种情形讨论.

1) $w_s \neq w_t$均不为零，此时方程

$$a^{-1}\lambda^2 - 2b^{-1}\lambda = a^{-1}a_i - 2b^{-1}b_i \tag{15}$$

有两个相异实根λ_s,λ_t. 根据根与系数之间关系，有

$$\begin{cases} \lambda_s + \lambda_t = 2ab^{-1} \\ \lambda_s\lambda_t = 2ab^{-1}b_i - a_i \end{cases} \tag{16}$$

2) 只有唯一的w_s不为零，此时方程(15)有一个二重根，因而

$$4b^{-2} + 4a^{-1}(a^{-1}a_i - 2b^{-1}b_i) = 0$$

化简得

$$a^2 - 2abb_i + b^2a_i = 0 \tag{17}$$

现在来研究a/b^2的上界，根据(14)式，有

$$a=\sum_{i=1}^{r}a_i,\qquad b=\sum_{i=1}^{r}b_i$$

如果(17)式成立，则有

$$\begin{aligned} & ma^2 - 2ab\sum_{i=1}^{r}b_i + b^2\sum_{i=1}^{r}a_i = 0 \\ \Rightarrow\quad & ma^2 - 2ab^2 + ab^2 = 0 \\ \Rightarrow\quad & ma^2 - ab^2 = 0 \\ \Rightarrow\quad & a/b^2 = 1/m \end{aligned}$$

这表明当方程(15)只有单实根时，a/b^2取最小值，于是，当方程（15）有两个相异实根时，a/b^2取最大值.

根据(16)式，有

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{r}(\lambda_{s_i} + \lambda_{t_i})^2 = 4ra^2b^{-2} \\ \sum_{i=1}^{r}\lambda_{s_i}\lambda_{t_i} = 2ab^{-1}\sum_{i=1}^{r}b_i - \sum_{i=1}^{r}a_i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \sum_{i=1}^{r}\lambda_{s_i}\lambda_{t_i} \\ b^2 = 4ra^2\Big/\sum_{i=1}^{r}(\lambda_{s_i} + \lambda_{t_i}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{b^2}=\frac{\sum_{i=1}^{r}(\lambda_{s_i}+\lambda_{t_i})^2}{4r\sum_{i=1}^{r}\lambda_{s_i}\lambda_{t_i}} \tag{18}$$

其中 $s_1,s_2,\cdots,s_r,t_1,t_2,\cdots,t_r$ 是 1，2，…，n 中任意 $2r$ 个数的一个排列. 现在我们需要解决的是从 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 中选取 $(\lambda_{s_1},\lambda_{s_2},\cdots,\lambda_{s_r})$ 与 $(\lambda_{t_1},\lambda_{t_2},\cdots,\lambda_{t_r})$ 使 a/b^2 最大.

要(18)式最大，首先应选取 λ_1 与 λ_n，因为对 $\lambda_1 \ge \lambda_i,\lambda_j \ge \lambda_n$ 有

$$\lambda_1\lambda_n+\lambda_i\lambda_j \le \lambda_1\lambda_i+\lambda_j\lambda_n$$

所以

$$\frac{\lambda_1^2+\lambda_n^2+\lambda_i^2+\lambda_j^2}{\lambda_1\lambda_n+\lambda_i\lambda_j} \ge \frac{\lambda_1^2+\lambda_i^2+\lambda_j^2+\lambda_n^2}{\lambda_1\lambda_i+\lambda_j\lambda_n} \Leftrightarrow \frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2+(\lambda_i+\lambda_j)^2}{\lambda_1\lambda_n+\lambda_i\lambda_j} \ge \frac{(\lambda_1+\lambda_i)^2+(\lambda_j+\lambda_n)^2}{\lambda_1\lambda_i+\lambda_j\lambda_n}$$

接下来应选取 λ_2 与 λ_{n-1}，因为对 $\lambda_2 \ge \lambda_i,\lambda_j \ge \lambda_{n-1}$，同样有

$$\frac{\lambda_1^2+\lambda_n^2+\lambda_2^2+\lambda_{n-1}^2+\lambda_i^2+\lambda_j^2}{\lambda_1\lambda_n+\lambda_2\lambda_{n-1}+\lambda_i\lambda_j} \ge \frac{\lambda_1^2+\lambda_n^2+\lambda_2^2+\lambda_{n-1}^2+\lambda_i^2+\lambda_j^2}{\lambda_1\lambda_n+\lambda_2\lambda_i+\lambda_j\lambda_{n-1}}$$

如此类推下去，便可得 a/b^2 的最大值为

$$\frac{\sum_{i=1}^{m}(\lambda_i+\lambda_{n-i+1})^2}{4r\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\lambda_{n-i+1}}$$

从而由(9)式得

$$\frac{\operatorname{tr}(H'\Lambda^2H)}{\operatorname{tr}(H'\Lambda H)^2} \le \frac{\sum_{i=1}^{m}(\lambda_i+\lambda_{n-i+1})^2}{4\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\lambda_{n-i+1}}$$

这就完成了引理的证明.

下面我们来证明定理，取正交阵 N 使 $N\Sigma N'=\Lambda,\Lambda=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，记 $R=NPN',S=N\theta N'$，则 R 与 S 分别为往 $R(R)$ 与 $R(S)$ 上的正交投影阵. 设 $\operatorname{rank}(X)=r$，则 $\operatorname{rank}(R)=r,\operatorname{rank}(S)=n-r$，取正交阵 $M=(H\,|\,L)$，使 $R(H)=R(R)$，则有 $R(L)=R(S)$ 且 HH' 与 LL' 分别是往 $R(R)$ 与 $R(S)$ 上的正交投影阵. 于是由正交投影阵的唯一性知，$R=HH'$ 且 $S=LL'$.

定理 1 的证明，根据引理 2 知

$$\hat{\mu}-\tilde{\mu}=P\Sigma\theta(\theta\Sigma\theta)^+\theta(Y-\mu)$$

于是

$$\begin{aligned}\|\hat{\mu}-\tilde{\mu}\|^2&=(Y-\hat{\mu})'\theta(\theta\Sigma\theta)^+\theta\Sigma P\Sigma\theta(\theta\Sigma\theta)^+\theta(Y-\hat{\mu})\\&\le\lambda_1\left(\theta(\theta\Sigma\theta)^+\theta\Sigma P\Sigma\theta(\theta\Sigma\theta)^+\theta\right)\|Y-\hat{\mu}\|^2\end{aligned} \tag{19}$$

因为

$$\begin{aligned}N\theta(\theta\Sigma\theta)^+\theta\Sigma P\Sigma\theta(\theta\Sigma\theta)^+\theta N'&=N\theta(\theta\Sigma\theta)^+\theta\Sigma(I-\theta)\Sigma\theta(\theta\Sigma\theta)^+\theta N'\\&=N\theta(\theta\Sigma\theta)^+\theta\Sigma^2\theta(\theta\Sigma\theta)^+\theta N'-N\theta(\theta\Sigma\theta)^+\theta\Sigma N'\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= S(S\Lambda S)^{+} S\Lambda^{2} S(S\Lambda S)^{+} S - S(S\Lambda S)^{+} S\Lambda S \\
&= LL'(LL'\Lambda LL')^{+} LL'\Lambda^{2} LL'(LL'\Lambda LL')^{+} LL' - LL'(LL'\Lambda LL')^{+} LL'\Lambda LL' \\
&= LL'L(L'\Lambda L)^{-1} L'LL'\Lambda^{2} LL'L(L'\Lambda L)^{-1} L'LL' - LL'L(L'\Lambda L)^{-1} L'LL'\Lambda LL' \\
&= L(L'\Lambda L)^{-1} L'\Lambda^{2} L(L'\Lambda L)^{-1} L' - LL'
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
\lambda_1\Big(\theta(\theta\Sigma\theta)^{+}\theta\Sigma P\Sigma\theta(\theta\Sigma\theta)^{+}\theta\Big) &= \lambda_1\Big(N\theta(\theta\Sigma\theta)^{+}\theta\Sigma P\Sigma\theta(\theta\Sigma\theta)^{+}\theta N'\Big) \\
&= \lambda_1\Big(L(L'\Lambda L)^{-1} L'\Lambda^{2} L(L'\Lambda L)^{-1} L' - LL'\Big) \\
&= \lambda_1\Big((L'\Lambda L)^{-1} L'\Lambda^{2} L(L'\Lambda L)^{-1} - I\Big) \\
&= \lambda_1\Big((L'\Lambda L)^{-2} L'\Lambda^{2} L\Big) - 1 \qquad (20)
\end{aligned}
$$

而

$$
\lambda_1\Big((L'\Lambda L)^{-2}(L'\Lambda^{2} L)\Big) = \sup_{\alpha'\alpha=1} \frac{\alpha' L'\Lambda^{2} L\alpha}{\alpha'(L'\Lambda L)^{2}\alpha} \le \sup_{\alpha'\alpha=1} \frac{\alpha' L'\Lambda^{2} L\alpha}{(\alpha' L'\Lambda L\alpha)^{2}} = \sup_{\alpha'\alpha=1} \frac{\alpha'\Lambda^{2}\alpha}{(\alpha'\Lambda\alpha)^{2}} = \sup_{\alpha'\alpha=1} \frac{\operatorname{tr}(\alpha'\Lambda^{2}\alpha)}{\operatorname{tr}(\alpha'\Lambda\alpha)^{2}}
$$

于是由引理4可得

$$
\lambda_1\Big((L'\Lambda L)^{-2} L'\Lambda^{2} L\Big) \le \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}
$$

从而由(20)式即得

$$
\|\hat{\mu} - \tilde{\mu}\|^2 \le \frac{(\lambda_1 - \lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}\|Y - \hat{\mu}\|^2 \Rightarrow \|\hat{\mu} - \tilde{\mu}\| \le \frac{\lambda_1 - \lambda_n}{2\sqrt{\lambda_1\lambda_n}}\|Y - \hat{\mu}\|
$$

定理1证毕.

定理2的证明，因为

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tr}\Big(P\Sigma\theta(\theta\Sigma\theta)^{+}\theta\Sigma P\Big) &= \operatorname{tr}\Big(\Sigma\theta(\theta\Sigma\theta)^{+}\theta\Sigma - \theta\Sigma\theta\Big) = \operatorname{tr}\Big((\theta\Sigma\theta)^{+}\theta\Sigma^{2}\theta - \theta\Sigma\theta\Big) \\
&= \operatorname{tr}\Big\{(\theta\Sigma\theta)^{+}\Big(\theta\Sigma^{2}\theta - (\theta\Sigma\theta)^{2}\Big)\Big\} \le \lambda_1(\theta\Sigma\theta)^{+}\operatorname{tr}\Big(\theta\Sigma^{2}\theta - (\theta\Sigma\theta)^{2}\Big)
\end{aligned}
$$

而

$$
\lambda_1(\theta\Sigma\theta)^{+} = \lambda_1(S\Lambda S)^{+} = \lambda_1(LL'\Lambda LL')^{+} = \lambda_1(L'\Lambda L)^{-1} = 1/\lambda_n
$$

于是利用(5)式即得

$$
\operatorname{tr}\Big(P\Sigma\theta(\theta\Sigma\theta)^{+}\theta\Sigma P\Big) \le \frac{1}{4\lambda_n}\sum_{i=1}^{m}(\lambda_i - \lambda_{n-i+1})
$$

定理2证毕.

定理3的证明. 因为

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{tr}(P\Sigma P)^2 = \operatorname{tr}(R\Lambda R)^2 = \operatorname{tr}(HH'\Lambda HH'HH'\Lambda HH') = \operatorname{tr}(H'\Lambda HH'\Lambda H) = \operatorname{tr}(H'\Lambda H)^2 \\
&\operatorname{tr}(P\Sigma^2 P) = \operatorname{tr}(R\Lambda^2 R) = \operatorname{tr}(HH'\Lambda^2 HH') = \operatorname{tr}(H'\Lambda^2 H)
\end{aligned}
$$

于是由引理4即得

$$
\frac{4\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\lambda_{n-i+1}}{\sum_{i=1}^{m}(\lambda_i + \lambda_{n-i+1})^2} \le \frac{\operatorname{tr}(P\Sigma P)^2}{\operatorname{tr}(P\Sigma^2 P)} \le 1
$$

定理3证毕.

(下转第118页)

[3] http://www.umi.com [DB/OL].

The Management and Utilization to dissertations

DAI Hua-sheng, HE Ping
(Library, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, China)

Abstract: The dissertation of the postgraduates is an important information resource,but the mananement and exploitage to them isn't so satisfactory. This article discusses how to efficiently utilizate the resource,and introduces many kinds of retrieval books and systems.

Key words: dissertation; information resource; management retrieval

(上接第106页)

参考文献:

[1] Baksalary J K, Kala R. A bound for the Euclidean norm of the difference between the least square and the best linear unbiased estimates [J]. Ann. Statist., 1978,(6):1390～1393.

[2] Baksalary J K. A new bound for the Euclidean norm of the difference between the least squares and the best linear unbiased estimators [J]. Ann. Statist., 1980,(80):679～681.

[3] Bloomfield P, Watson G S. The inefficiency of least squares [J]. Biometrica, 1975(62):121～132.

[4] Knott M. On the minimum efficiency of least squares [J]. Biometrica, 1975(62):129～132.

[5] Haberman S J. How much do Gauss-Markoff and least square estimates differ? A doordinate free approach [J]. Ann. Statist.,1975,(3):982～990.

[6] Kruskal W H. When are Gauss-Markoff and least squares estimators indentical, A coordinate free approach [J] Ann. Statist., 1968,(39):70～75.

[7] Rao C R. A note on a previous lemma in the theory of least squares and some further results [J]. Sankhya A, 1968(30):259～266.

[8] Rao C R. The inefficiency of least squares; extensions of the kantorovich inequality [J]. Linear Algebra and its Application, 1985,(70):249～255.

[9] Wang S G, Yang H. Kantorovich type inequality and measures of inefficiency of the GLSE [J]. Acta Math. Appl. Sinica, 1989,(5): 327～384.

[10] Zyskind G. On canonical forms, nonnegative covariance matrices and best simple least squares linear estimators in linear model [J]. Ann. Math. Statist., 1967,(38):1092～1109.

Measures of Inefficiency of Least Squares

Wu Liu-cang, Huang Wen-liang, Zhan Jin-long
(Faculty of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, China)

Abstract For Gauss-Markov model, three measures of the inefficiency of least squares are considered and their bounds are given.

Key words: Gauss-Markov model; least square estimate; Gauss-Markov estimate; inefficiency