第 30卷 第 3期 昆 明 理 工 大 学 学 报 (理 工 版) Vol. 30 No. 3
2005年 6月 Journal of Kunming University of Science and Technology (Science and Technology) Jun 2005

有偏总体的均值控制图

周丙常, 师义民, 于 蕾
(西北工业大学 应用数学系, 陕西 西安 710072)

摘要: 根据加权标准差方法建立有偏总体的均值控制图, 根据样本数据的偏度来计算上下控制限, 对于总体是对称分布, 该控制图退化为标准的休哈特控制图. 最后, 用蒙特卡洛方法给出了改进的控制图常数.

关键词: 均值控制图; 蒙特卡洛模拟; 加权标准差
中图分类号: O213. 1 文献标识码: A 文章编号: 1007- 855X(2005) 03- 0123- 04

Mean Control Chart for Skewed Populations

ZHOU Bing-chang, SHI Yi-min, YU Lei
(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi' an 710072, China)

Abstract: Based on a weighted standard deviations method for skewed populations, a mean control chart is set up. Upper and lower control limits are computed in accordance with skewness estimated from the sample data. For symmetric populations, however, this chart reduces to Shewhart control chart. Finally, improved control chart constants are given by Monte Carlo simulation.

Key words: mean control chart; Monte Carlo simulation; weighted variational coefficient

0 引 言

控制图是过程控制和连续质量管理中的重要内容, 它用来判断过程是否处于统计控制状态, 使失控状态进入受控状态. 传统的休哈特控制图假设质量特性服从或近似服从正态分布, 这样当均值控制图用 3σ 控制限时, 处在控制状态下的样本点落在控制限外的概率为 0. 002 7.

然而许多情况下, 我们有理由怀疑正态假定的合理性. 例如刀具切割过程、一般化学过程、无线电半导体过程和加速寿命试验过程, 质量特性 X 通常服从有偏分布. 对于有偏总体, 伪警报会随着偏度的增加而增大. 因此, 我们应寻找一种方法, 使得对任意有偏分布, 伪警报率控制在一定范围之内. 这里, 我们应用 Chang Y. S. 和 Bai D. S [1]的加权标准差方法来建立均值控制图, 并给出控制图常数.

1 加权标准差方法

加权标准差方法是建立在一个有偏分布, 可以在它的均值处分为两部分, 每一部分均可产生一个新的对称分布的思想上, 两个新的分布来自于原来的有偏分布, 并与它有相同的均值, 但其标准差不同. 加权标准差方法用这两个分布建立控制限, 也就是说, 其中一个用来计算标准差, 建立上控制限 (Upper Control Limit, UCL), 另一个用来建立下控制限 (Lower Control Limit, LCL). 如果总体向右偏, 控制上限到中心限的距离大于控制下限到中心限的距离. 同样, 如果总体向左偏, 那么, 控制下限到中心限的距离大于控制上限到中心限的距离. 对于对称总体, 控制上限与控制下限到中心限的距离相同, 建立在加权标准差上的控制图退化为传统的休哈特控制图.

加权标准差方法和传统的休哈特方法一样, 用标准差建立控制限. 然而, 它不同于传统的休哈特控制

收稿日期: 2004- 10- 25.
第一作者简介: 周丙常 (1981~), 男, 在读博士. 主要研究方向: 金融数学与非线性动力系统.
E- mail: bczhou98@ 126. com

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

图的地方是标准差分别乘以两个不同的因子,一个因子用来建立控制上限,另一个因子用来建立控制下限.假设 P 代表质量特性 X 小于等于均值 μ 的概率,那么控制上限的因子为 $2P$,控制下限的因子为 $2(1-P)$,具体推导见 Chang Y. S. 和 Bai D. S[1].

建立在加权标准差方法上的均值控制图的控制限为:

$$UCL_{WSD} = \mu + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot 2P \tag{1}$$

$$LCL_{WSD} = \mu - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot 2(1-P) \tag{2}$$

其中 σ 为 X 的标准差, n 为一个子样本的容量.如果 P 和均值 μ,标准差 σ,子样本数 n 已知,方程(1)、(2)可以用来计算建立在加权标准差方法上的均值控制图.如果总体分布是对称的,那么 $P = 0.5$,也就是说,改进的控制图退化为传统的休哈特均值控制图.然而,如果总体向右偏,那么 P 大于 0.5,控制上限到中心限的距离大于控制下限到中心限的距离.如果总体向左偏,那么 P 小于 0.5,控制下限到中心限的距离大于控制上限到中心限的距离.

2 建立在加权标准差上的均值控制图

为了在实际中应用加权标准差方法, P, μ 和 σ 必须由样本数据来估计, P 可以由观察值小于等于 $\bar{\bar{X}}$ 的个数除以样本总数来估计,即

$$\hat{P} = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} I(\bar{\bar{X}} - X_{ij})}{k \times n} \tag{3}$$

其中 k 和 n 分别代表样本个数和每个子样本的样本数, $I(x) = 1(x \geqslant 0)$, $I(x) = 0(x < 0)$, $\bar{\bar{X}}$ 代表 k 个样本均值的均值.

一般地, $\bar{\bar{X}}$ 和 $\bar{R}/d_2$ 分别用来估计 μ 和 σ, $\bar{R}$ 代表 k 个样本极差的均值,常数 d_2 由样本标准差 σ_X 和样本极差均值 $\bar{R}$ 来计算,公式为 $d_2 = \bar{R}/\sigma_X$ 为.然而,常数 d_2 是在正态分布的假定下求出来的,因此,当分布有偏时,我们采用可以反映出偏度影响的 d_2^{WSD} 来计算.

$$d_2^{WSD} = Pd_2(2n(1-P)) + (1-P)d_2(2nP) \tag{4}$$

详细推导见 Chang Y. S. 和 Bai D. S[1].

有了 d_2^{WSD},我们就可以算出有偏总体均值控制图的控制限:

$$UCL_{WSD} = \bar{\bar{X}} + \frac{3\bar{R}}{d_2^{WSD}\sqrt{n}} \cdot 2\hat{P} = \bar{\bar{X}} + W_U\bar{R} \tag{5}$$

$$LCL_{WSD} = \bar{\bar{X}} - \frac{3\bar{R}}{d_2^{WSD}\sqrt{n}} \cdot 2(1-\hat{P}) = \bar{\bar{X}} - W_U\bar{R} \tag{6}$$

由周纪芗和茆诗松[4]中 $d_2(n)$ 的公式,用蒙特卡洛方法求出 $d_2(n)(n = 2, 3, \cdots, 45)$ 的大小,然后利用公式(4)、(5)、(6),并运用线性插值方法可以求出常数 W_U 和 W_L.

表 1 给出了用加权标准差方法求出的均值控制图常数 W_U 和 W_L. $P \leqslant 0.5$ 时, W_U 的值与 $1-P$ 对应在表 1 中 W_L 的值相同.同样, $P \leqslant 0.5$ 时, W_L 的值与 $1-P$ 对应在表 1 中 W_U 的值相同.例如:如果 $n = 5$,对 $P = 0.62$,有 $W_U = 0.75$ 和 $W_L = 0.46$,对 $P = 0.38$ 有 $W_U = 0.46$ 和 $W_L = 0.75$.

如果 P 是从样本数据中估计得到的,我们可以根据 n 和 $\hat{P}$ 取最接近的常数.例如: $n = 5$ 时, $\hat{P} = 0.567$,那么取 $W_U = 0.65$ 和 $W_L = 0.51$,或者用线性插值算得: $W_U = 0.66$ 和 $W_U = 0.50$

据表 1, $P = 0.5$ 时,加权标准差方法和用休哈特方法算出的均值控制图常数相同,控制上限到中心限的距离随着 P 的增大而增大. $P \leqslant 0.5$ 时,控制下限到中心限的距离随着 P 的减小而增大.由表 1 还可看出,当样本量较大时用加权标准差方法算出的均值控制图常数对偏度是稳定的.

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

表 1　加权标准差方法的均值控制图常数

Tab. 1　Control chart constants based on a WSD method

P_X	$n=2$	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
0.50	1.88	1.02	0.73	0.58	0.48	0.42	0.37	0.34	0.31	0.22	0.18
0.52	1.96	1.10	0.76	0.60	0.50	0.44	0.39	0.35	0.32	0.23	0.19
0.54	2.04	1.15	0.79	0.63	0.52	0.45	0.40	0.37	0.33	0.24	0.19
0.56	2.13	1.20	0.83	0.65	0.55	0.47	0.42	0.38	0.35	0.25	0.20
0.58	2.23	1.26	0.87	0.68	0.57	0.49	0.44	0.40	0.36	0.26	0.21
0.60	2.34	1.33	0.92	0.72	0.60	0.52	0.46	0.41	0.38	0.27	0.22
0.62	2.46	1.40	0.97	0.75	0.63	0.54	0.48	0.43	0.39	0.28	0.23
0.64	2.59	1.48	1.03	0.80	0.66	0.57	0.50	0.45	0.41	0.30	0.24
0.66	2.73	1.57	1.10	0.84	0.69	0.60	0.53	0.47	0.43	0.31	0.25
0.68	2.88	1.68	1.17	0.90	0.73	0.63	0.55	0.50	0.45	0.32	0.26
0.70	3.06	1.79	1.26	0.96	0.78	0.66	0.58	0.52	0.48	0.34	0.27
0.50	1.88	1.02	0.73	0.58	0.48	0.42	0.37	0.34	0.31	0.22	0.18
0.52	1.81	1.01	0.70	0.55	0.46	0.40	0.36	0.32	0.30	0.21	0.17
0.54	1.74	0.98	0.68	0.53	0.45	0.39	0.34	0.31	0.29	0.21	0.17
0.56	1.68	0.95	0.65	0.51	0.43	0.37	0.33	0.30	0.27	0.20	0.16
0.58	1.62	0.91	0.63	0.49	0.41	0.36	0.32	0.29	0.26	0.19	0.15
0.60	1.56	0.89	0.61	0.48	0.40	0.34	0.31	0.28	0.25	0.18	0.15
0.62	1.51	0.86	0.60	0.46	0.38	0.33	0.30	0.26	0.24	0.17	0.14
0.64	1.45	0.83	0.58	0.45	0.37	0.32	0.28	0.25	0.23	0.17	0.13
0.66	1.41	0.81	0.57	0.43	0.36	0.31	0.27	0.24	0.22	0.16	0.13
0.68	1.36	0.79	0.55	0.42	0.34	0.30	0.26	0.23	0.21	0.15	0.12
0.70	1.31	0.77	0.54	0.41	0.33	0.28	0.25	0.22	0.20	0.14	0.12

* 上部分是 W_U, 下部分是 W_L.

3 算 例

用蒙特卡洛方法产生一个例子: 取 30组样本, 每组样本有 5个子样本, 该样本来自于威布尔分布. 由产生的随机数算得 $\bar{\bar{X}} = 0.99$, $\bar{R} = 2.43$, $P = 0.687$, 建立在加权标准差和休哈特方法上的控制限分别为,

加权标准差方法:

$$UCL_{WSD} = \bar{\bar{X}} + W_U\bar{R} = 0.99 + 0.92 \times 2.43 = 3.23$$

$$LCL_{WSD} = \bar{\bar{X}} - W_L\bar{R} = 0.99 - 0.42 \times 2.43 = -0.03 \Rightarrow 0.00$$

休哈特方法:

$$UCL_{WSD} = \bar{\bar{X}} + A_2\bar{R} = 0.99 + 0.58 \times 2.43 = 2.40$$

$$UCL_{WSD} = \bar{\bar{X}} - A_2\bar{R} = 0.99 - 0.58 \times 2.43 = -0.42 \Rightarrow 0.00$$

图 1给出了用加权标准差和休哈特方法建立的控制图, 根据控制图的判断准则, 所有点落在上下控制限内表示过程处于受控状态, 而有两个点落在休哈特控制图的上限以上, 发出伪警报.

当总体分布有偏时, 加权标准差方法比传统的休哈特方法更有效. 当总体分布对称时改进的控制图退化为休哈特控制图. 在实际应用中, 重要的是决定总体分布是否有偏.

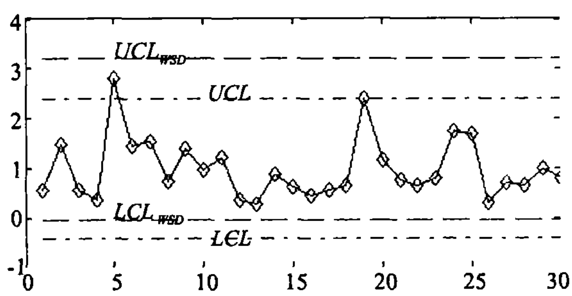

图1　加权标准差控制图和休哈特控制图

Fig.1　WSD control chart and shewhart control chart

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

另外,当检验过程数据是否有偏时,过程必须处于受控状态.例如,如果30组来自同一正态分布的样本中有许多样本的均值向上漂移,它可能给出一个分布是有偏的误导.因此我们应检查偏度是否由有偏分布或失控过程造成的.对于正态分布的检验问题,可以参考Bradley[2]和Ramsey[3].

4 结论

本文讨论了对于有偏分布的控制图的建立,给出了控制图常数 W_U 和 W_L,方便了实际工作者的应用.另外,在许多应用中通常不完全知道质量特性分布的知识,特别在产品周期的早期,此时更适合用这类控制图.因此,建立在加权标准差上的控制图有很好的实际意义.

参考文献:

[1] Chang Y S, Bai D S. Control Charts for Positively-skewed Populations with Weighted Standard Deviations[J]. Quality and Reliability Engineering International, 2001, 17: 397~406

[2] Bradley J V. A Common Situation Conducive to Bizarre Distribution Shapes[J]. The American Statistician, 1977, 31: 147~150.

[3] Ramsey P P, Ramsey P H. Simple Tests of Normality in Small Samples[J]. Journal of Quality Technology, 1990, 22: 299~309.

[4] 周纪芗,茆诗松. 质量管理统计方法[M].北京:中国统计出版社,1999.

●简讯:

《昆明理工大学学报(理工版)》被美国《化学文摘》收录

通过努力申请和近几年坚持不懈地提高学报的学术水平和规范化等级,2005年5月24日,我校理工版学报编辑部收到了国际著名的美国《化学文摘》(Chemical Abstracts,缩写CA)服务部的回函,称:

> "……经过对贵刊的评审,发现贵刊适合在"化学文摘"做摘要和索引收录,因此,我们将作出适当的安排,接受自2005年起贵刊在未来所出版的各期杂志。"

也就是说,从2005年第1期开始,《昆明理工大学学报(理工版)》上所刊登的有关"生物化学、化学及化学工程"(Biochemistry, Chemistry, and Chemical Engineering)等学科的论文,其摘要或文题可能会被收录进《化学文摘》数据库。

欢迎我校化轻学院及校内外相关专业的学者踊跃向本学报投递高质量论文稿件。

《化学文摘》网址(美国总部):http://www.cas.org/;中国代理网址:http://www.igroup.com.cn/cas/

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net