第 31卷 第 1期 昆明理工大学学报(理工版) Vol.31 No.1
2006年 2月 Journal of Kunming University of Science and Technology (Science and Technology) Feb. 2006

标的资产混合过程的欧式未定权益定价

苏 军[1,2], 赵选民[1], 王雪峰[2]
(1. 西北工业大学 应用数学系, 陕西 西安 710072; 2. 西安科技大学 基础课部, 陕西 西安 710054)

摘要: 未定权益定价是金融数学的基本问题之一. 讨论了无摩擦连续时间金融市场的欧式未定权益定价问题, 其中标的资产价格为 Itô过程和复合 Poisson过程组成的"混合"过程. 利用鞅方法得到了欧式未定权益定价的一般公式, 欧式看涨期权和看跌期权定价及平价关系.

关键词: 未定权益定价; 鞅方法; 金融数学
中图分类号: O211.6; F830.9 文献标识码: A 文章编号: 1007-855X(2006)01-0112-03

European Contingent Claims Valuation in the Mixed Process of the Underlying Asset Price

SU Jun[1,2], ZHAO Xuan-min[1], WANG Xue-feng[2]
(1. Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnic University, Xi'an 710072, China;
2. Department of Basic Courses, Xi'an University of Science and Technology, Xi'an 710054, China)

Abstract: Contingent claims valuation is one of elementary problems of financial mathematics. The problem of European contingent claims valuation in a frictionless security market with continuous trading is discussed. The underlying asset prices are the combination of its process and a compound poisson process. Using martingale methods, general pricing formula of European contingent claims is derived and European option and put-call parity is analyzed.

Key words: contingent claims valuation; martingale method; financial mathematics

0 引 言

1973年, Black-Scholes[1]发表了关于期权定价的开创性论文, 指出利用套利推理和 Itô公式证明了欧式看涨期权定价公式, 即著名的 Black-Scholes公式. 随后, Merton在文[2]中对 Black-Scholes模型和定价公式作了完善和多方面的推广. 由他们三人共同开创的期权定价理论被誉为"华尔街的第二次革命". Black-Scholes模型假定股价服从几何 Brown运动的连续随机过程, 但大量的金融实践已经充分表明, 用不连续的随机过程描述金融市场股价的波动更为切合实际. 文献[3, 4, 5]等讨论了这一市场下未定权益的定价及相关问题, 其中文献[3]讨论了一种完备无套利金融市场模型, 其标的资产价格过程是由 Itô过程和复合 Poisson过程组成的"混合"过程.

1 模型假设

本文在文献[3]的基础上, 由市场的完备性, 利用鞅方法首先得到该半鞅模型欧式未定权益定价的一般公式, 给出了欧式看涨期权和看跌期权定价公式及平价关系.

文中假定该市场仅有两种资产, 一种是无风险资产(如债券), 其价格过程满足方程

$$dS^0(t) = r(t)S^0(t)\,dt \tag{1}$$

其中 $r(t) > 0$为 t时刻无风险利率. 其相应的贴现因子 $\beta(t) = \exp\{-\int_0^t r(s)\,ds\}$; 另一种是风险资产(如股

收稿日期: 2005-03-15 基金项目: 国家自然科学基金项目(项目编号: 79970022)和航空基金项目(项目编号: 02J53079).
第一作者简介: 苏军(1977~), 女, 硕士. 主要研究方向: 统计学与金融数学.

票), 其价格过程 $S(t)$ 满足随机微分方程

$$\frac{dS(t)}{S(t-)} = (\mu(t) - \lambda(t)\theta)dt + \sigma(t)dB(t) + YdH(t) \tag{2}$$

其中 $\{B(t), 0 \leqslant t \leqslant T\}$ 是定义在完备概率空间 (Ω, F, P) 上的标准 Brown运动; $H(t)$ 是与 $B(t)$ 相互独立的参数为 $\lambda(t)$ 的 Poisson过程, Y是股价每次跳跃的高度, Y与 $H(t)$ 独立, $\ln(1+Y)$ 服从正态分布 $N(\ln(1+\theta - \frac{1}{2}\sigma_J^2), \frac{1}{2}\sigma_J^2)$, σ_J^2 为 $\ln(1+Y)$ 的方差, 而 θ是 Y的无条件期望, 表示由风险资产价格带来的平均增长率.

显然, 该标的资产价格过程是一特殊结构的半鞅, 即文献[3]中所描述的 Itô过程和复合 Poisson过程的"混合"过程. 该混合过程既描述了由经济因素引起的标的资产价格正常波动, 又较准确地描述了由不寻常的非经济因素而带给标的资产价格的"跳跃". 因此, 我们假设标的资产价格服从该"混合"过程是一种较理想的选择.

由 Doleans-Dade指数公式, 随机微分方程(2)的解为

$$S(t) = S(0)\exp\left\{\int_0^t \left(\mu(s) - \lambda(s)\theta - \frac{1}{2}\sigma^2(S)\right)ds + \int_0^t \sigma(s)dB(s)\right\} \cdot \prod_{i=1}^{H(t)}(1+Y_i) \tag{3}$$

2 主要结果

我们考虑欧式未定权益, 由市场的完备性可知, 未定权益 $X \in F_T$ 是可达的, 即若有 $\varnothing = \Phi_s$, 使 $V_T(\phi) = \pi(S_T)$, 这时称 ϕ为 X 的套期保值策略. 对于可达的未定权益, 可以在市场上实施它的保值策略 ϕ而得到它的复制. 因此, 我们可以定义它的价格过程 $\pi(S_t) = V_t(\phi)$. 特别地, 当 $t = 0$时, $\pi(S_0) = V_0(\phi)$ 即为未定权益 X 的价格.

引理 1 定义新概率测度 P^*, 使得 $B^*(t) = B(t) + \int_0^t (\mu - r)/\sigma ds$ 是 $(\Omega, \{F_t\}_{t\geqslant 1}, P^*)$ 上的标准 Brown运动, 折现价值过程 $V_t^*(\phi) = \beta(t)V_t(\phi)$ 是 P^* -鞅, 其中 P^* 是 P 的等价鞅测度.

定理 2 (1) 欧式看涨期权 $\pi(S_T) = (S_T - K)^+$, t时刻价格为

$$c(t, S_t) = E_{P^*}\left[(S_T - K)^+ e^{-\int_t^T r(s)ds}\right]$$
$$= S(0)e^{\int_0^t r(s)ds}W_1(\theta, \lambda(s), T)N(d_n^1) - Ke^{-\int_t^T r(s)ds}W_2(\lambda(s), T)N(d_n^2)$$

其中 N(x)为标准正态分布的累积分布函数

$$d_n^1 = \frac{\ln\frac{(1+\theta)^n S(0)}{K} + \frac{1}{2}n\sigma_J^2 + \frac{1}{2}\rho_T^2 + \int_0^T(-\lambda(s)\theta + r(s))ds}{\sqrt{n\sigma_J^2 + \rho_T^2}}, \quad d_n^2 = d_n^1 - \sqrt{n\sigma_J^2 + \rho_T^2}$$

$$W_1(\theta, \lambda(s), T) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left((1+\theta)\int_0^T\lambda(s)ds\right)^n}{n!}\exp\left(-(1+\theta)\int_0^T\lambda(s)ds\right)$$

$$W_2(\lambda(s), T) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\int_0^T\lambda(s)ds\right)^n}{n!}\exp\left(-\int_0^T\lambda(s)ds\right)$$

(2) 欧式看跌期权 $\pi(S_T) = (K - S_T)^+$, t时刻价格为

$$P(t, S_t) = Ke^{-\int_t^T r(s)ds}W_2(\lambda(s), T)N(-d_n^2) - S(0)e^{\int_0^t r(s)ds}W_1(\theta, \lambda(s), T)N(-d_n^1)$$

(3) 欧式看涨期权与看跌期权平价关系为

$$c(t, S_t) + Ke^{-\int_t^T r(s)ds}W_2(\lambda(s), T) = S(0)e^{\int_0^t r(s)ds}W_1(\theta, \lambda(s), T) + p(t, S_t)$$

证明 (1) 由(3)式,可写出其标的资产价格的折现过程

$$S^*(t) = S(0)\exp\left\{\int_0^t \sigma(s)\,dB^*(s) - \int_0^t \left(\frac{1}{2}\sigma^2(s) + \lambda(s)\theta\right)ds\right\}\cdot \prod_{i=1}^{H(t)}(1+Y_i^*) \qquad (4)$$

设 $A = \left\{S(T)e^{-\int_t^T r(s)ds} \geqslant Ke^{-\int_t^T r(s)ds}\right\} = \{\eta \geqslant d\}$, 其中记 $\eta = \int_0^T \sigma(s)\,dB^* + \sum_{i=1}^{n}\ln(1+Y_i^*)$, $d = \ln\frac{S(0)}{K} - \int_0^T\left(\frac{1}{2}\sigma^2(s) + \lambda(s)\theta - r(s)\right)ds$.

在新测度 P^* 下, $\int_0^T \sigma(s)\,dB^*(s) \sim N(0, P_T^2)$, $P_T^2 = \int_0^T \sigma^2(s)\,ds$

对给定的 n

$$\int_0^T \sigma(s)\,dB^* + \sum_{i=1}^{n}\ln(1+Y_i^*) \sim N\left(\ln(1+\theta)^n - \frac{1}{2}n\sigma_J^2,\ n\sigma_J^2 + P_T^2\right) E_{P^*}\left[\exp\left(\int_0^T \sigma(s)\,dB^* + \sum_{i=1}^{H(T)}\ln(1+Y_i^*)\right) I_A\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\{H(T)=n\}\cdot E_{P^*}\left[\exp\left(\int_0^T \sigma(s)\,dB^* + \sum_{i=1}^{n}\ln(1+Y_i^*)\right) I_{\{\eta+d\geqslant 0\}}\right]$$

$$= e^{P_T^2/2}\sum_{n=0}^{\infty} P\{H(T)=n\}(1+\theta)^n N(d_n^1)$$

所以

$$c(t, S_t) = E_{P^*}\left[(S_T - K)^+ e^{-\int_t^T r(s)ds}\right] = E_{P^*}\left[\left(S^*(T)e^{\int_0^t r(s)ds} - Ke^{-\int_t^T r(s)ds}\right)I_A\right]$$

$$= E_{P^*}\left[S^*(T)e^{\int_0^t r(s)ds} I_A\right] - E_{P^*}\left[Ke^{-\int_t^T r(s)ds} I_A\right]$$

$$E_{P^*}\left[S^*(T)e^{\int_0^t r(s)ds} I_A\right]$$

$$= S(0)e^{\int_0^t r(s)ds}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left((1+\theta)\int_0^T \lambda(s)\,ds\right)^n}{n!}\exp\left(-(1+\theta)\int_0^T \lambda(s)\,ds\right)N(d_n^1)$$

$$E_{P^*}\left[Ke^{-\int_t^T r(s)ds} I_A\right] = Ke^{-\int_t^T r(s)ds}E_{P^*}[I_A]$$

$$= Ke^{-\int_t^T r(s)ds}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\int_0^T \lambda(s)\,ds\right)^n}{n!}\exp\left(-\int_0^T \lambda(s)\,ds\right)N(d_n^2)$$

所以,结论(1)成立.

(2) 类似(1)的证明可得结论成立.

(3) 由结论(1)和(2)可得欧式看涨期权与看跌期权的平价关系为

$$c(t, S_t) + Ke^{-\int_t^T r(s)ds}W_2(\lambda(s), T) = S(0)e^{\int_0^t r(s)ds}W_1(\theta, \lambda(s), T) + p(t, S_t)$$

由定理2中结论(1),当 $t = 0$ 时, $V_0(\Phi)$ 即为欧式看涨期权的价格.

推论 欧式看涨期权的价格为

$$V_0(\Phi) = S(0)W_1(\theta, \lambda(s), T)N(d_n^1) - Ke^{-\int_0^T \lambda(s)ds}W_2(\lambda(s), T)N(d_n^2) \qquad (5)$$

(下转第118页)

算顾客满意度指数的建模方法,通过此方法求出的顾客满意度、忠诚度等顾客满意度指数比直接由三级指标主观赋权数,加权平均求出的结果更合理、准确, 且易于编程,易于上机实现.

参考文献:

[1] 唐晓芬. 顾客满意度测评 [M]. 上海:上海科学技术出版社, 2001.

[2] 国家质检总局质量管理司,清华大学中国企业研究中心. 中国顾客满意指数指南 [M]. 北京:中国标准出版社, 2003.

[3] CLAES F. A National Customer Satisfation Barometer: The Swedish Experience[J]. Journal of Marketing, 1992, 56.

[4] TENENHAUS M, GAUCHI J P, MENARDO C. Regression PLS et application[J]. Revue de Statistiques Appliquees, 1995, 53(1): 7~63.

[5] TENENHAUS M. La regression PLS theorie et pratique[M]. Paris: Editions Technip, 1998.

[6] 王惠文. 偏最小二乘回归及其应用 [M]. 北京:国防工业出版社, 1999.

[7] 李庆扬,王能超,易大义. 数值分析 [M]. 北京:清华大学出版社, 2002.

[8] 高惠璇. 实用统计方法与 SAS系统 [M]. 北京: 北京大学出版社, 2001.

[9] SAS Institute. SAS OnlineDoc(HTML Format) [OL/EB]. http://v8doc.sas.com/sashtml

[10] 高惠璇,等. SAS系统 SAS/STAT软件使用手册 [M]. 北京: 中国统计出版社, 1997.

(上接第 114页)

3 结 论

本文通过改变标的资产的价格行为模式的假设,即假定标的资产的价格过程为混合过程,由市场的完备性, 利用鞅方法讨论了无风险利率 $r(t)$ 和资产价格波动率 $\sigma(t)$ 均为时间 t 的函数时欧式未定权益的定价公式,在特定条件下对 Black-Scholes公式作了有限的推广.全文依然假设利率是时间 t 的函数, 而在实际金融市场中往往并非如此,因此可进一步探讨随机利率和随机波动率混合模型的未定权益定价问题.

参考文献:

[1] BLACK F, SCHOLES M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Journal of Political Economy, 1973, 81: 133~155.

[2] MERTON R C. Theory of rational option pricing[J]. Bell J Econ and Management Science, 1973, (4): 141~183.

[3] AASE K K. Contingent claims valuation when the security price is a combination of an Ito process and a random point process [J]. Stochastic Processes and their Applications, 1988, (28): 185~220.

[4] JEANBLANC P M, PONTIER M. Optimal portfolio for a small investor in a market model with discontinuous prices[J]. Applied Mathematics and Optimization, 1990, (22): 287~310.

[5] DRITSCHEL M, PROTTER P. Complete markets with discontinuous security price[J]. Finance and Stochastics, 1999, 3: 203~214.

[6] HARRISON J M, KTEPS D M. Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets[J]. J Economic Theory, 1979, (20): 381~408.

[7] HARRISON J M, PLISKA S R. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading[J]. Stochastic Processes and their Applications, 1981, (11): 215~260.

[8] DUFFIE D. Dynamic Asset Pricing Theory[M]. Ed, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1996.