

模糊数学在稳健优化设计中的应用

张素梅, 师义民, 刘焕香, 周丙常

(西北工业大学 应用数学系, 陕西 西安 710072)

摘要: 从多目标的角度出发考察了双目标成本-质量模型. 将试验设计方法和模糊数学知识结合起来, 利用模糊数学中的隶属度函数及贴近度原则实现了这一多目标稳健设计的最优问题, 并通过实例证明了该方法的有效性.

关键词: 稳健优化设计; 模糊数学; 成本-质量模型

中图分类号: TH 122 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-855X(2005)01-0121-04

Optimal Robust Design via Fuzzy Mathematics

ZHANG Su-mei, SHI Yi-min, LIU Huan-xiang, ZHOU Bing-chang

(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: The cost-quality model is investigated from multi-objective angle and fuzzy mathematics knowledge is introduced. An optimal robust design method based on experiment design approach and fuzzy mathematics is used to satisfactorily gain global optimal solution and the effectiveness of this method is verified by means of a practice.

Key words: optimal robust design; fuzzy mathematics; cost-quality model

0 引言

稳健设计是日本著名质量工程专家 Taguchi 提出的质量改进技术. 基于成本-质量模型的稳健优化设计就是将根据产品质量的稳定性来确定设计变量的容差与根据制造费用确定容差结合起来, 以期在设计阶段使产品的质量和成本之间达到最佳平衡的一种优化设计方法. 传统的基于成本-质量模型的稳健优化设计一般是将产品总费用作为目标函数的单目标优化设计. 从多目标的角度出发, 将试验设计方法和模糊数学知识结合, 实现了基于成本-质量模型的多目标稳健设计的最优问题.

1 成本-质量模型

采用文献[4]给出的双目标成本-质量模型:

$$\begin{aligned}
 & \text{Find } u_{jk} \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, h_j \\
 & \text{Min } \left| \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{h_j} u_{jk} C_m(\Delta x_{jk}), \quad \sum_{i=1}^m C_q(\bar{x}_i, \Delta x_i) \right| \\
 & \text{s. t. } \quad P \geq P_s \\
 & \quad \quad \sum_{k=1}^{h_j} k_{jk} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{1}$$

其中, Δx_{jk} 为尺寸 x_j 的第 k 个离散容差; h_j 为尺寸 x_j 可供选择的离散容差的个数; n, m 为容差链中的尺寸个数; C_m 为加工成本, C_q 为生产成本; u_{jk} 为尺寸 x_j 可供选择的第 k 个离散容差的选择系数, 当 Δx_{jk} 被选中时为 1, 否则为 0; P_s 是用户给定的装配成功率 P 的期望值.

收稿日期: 2004-07-06. 基金项目: 国家自然科学基金(项目编号: 70471057).

第一作者简介: 张素梅(1979~), 女, 在读硕士研究生. 主要研究方向: 应用概率统计、稳健设计、可靠性理论及其应用.

2 模糊数学的应用

贴近度刻划的是模糊向量和模糊集间贴近的程度. 若把模糊向量看成 n 维空间点, 则由加权海明距离:

$$d_{\omega}(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \omega(x_i) |u_A(x_i) - u_B(x)| \tag{2}$$

其中 $\omega(x_i)$ 为加权因子, $u(\cdot)$ 为隶属度函数, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \omega(x_i) = 1$. 用来刻划模糊向量 A 和 B 之间的距离.

由距离公式可得相应的贴近度:

$$r_p = 1 - d_{\omega}(A, B) \tag{3}$$

由于各个分目标构成的非劣解接近多目标全局最优稳健解的程度是模糊的, 因此可用模糊数学的择近原则, 从非劣解中得到满意的全局最优解. 将理想解和非劣解视为模糊集合 C^* 和 C_p

$$C^* = \left| \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{h_j} u_{jk} C_m(\Delta x_{jk}^*), \sum_{i=1}^m C_q(\bar{x}_i^*, \Delta x_i^*) \right| \tag{4}$$

$$C_p = \left| \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{h_j} u_{jk} C_m(\Delta x_{jk}), \sum_{i=1}^m C_q(\bar{x}_i, \Delta x_i) \right| \tag{5}$$

式中: p - 第 p 组非劣解 $p = [1, 2, \dots, s]$

式(4), (5) 简化为:

$$C^* = [u(C_1^*), u(C_2^*)] \tag{6}$$

$$C_p = [u(C_{p1}), u(C_{p2})] \tag{7}$$

式中

$$u(C_j^*) = 1, j = 1, 2$$

利用模糊贴近度, 就可度量非劣解模糊集合与理想解模糊集合之间的距离. 距离越小, 说明贴近的程度越高, 越接近理想解. 距离最小也即贴近度最大时为稳健设计的全局最优解.

由于非劣解相对于理想解隶属度的随机性和对称性, 多采用正态分布作为隶属度函数的分布规律.

$$u(C_{pj}) = \exp \left[- \left(\frac{C_{pj} - C^*}{1/s \sum_{p=1}^s |C_{pj} - C^*|} \right)^2 \right] \tag{8}$$

由(3) 可得贴近度公式为

$$\begin{aligned} r_p &= 1 - d_{\omega}(u(C_j^*), u(C_{pj})) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \omega_j |u(C_j^*) - u(C_{pj})| \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \omega_j u(C_{pj}) \end{aligned} \tag{9}$$

利用隶属度函数以及贴近度公式即可得到全局最优解.

3 设计实例

选择一个箱体上轴孔组的尺寸链进行优化设计, 其零件示意图见图 1. 该零件以孔 1, 4 间的间距作为封闭环, 装配要求 $(200 \pm 0.07)\text{mm}$ 且装配成功率不小于 99.73%. 其相应尺寸链如图 2 所示, 其中名义尺寸为 $X_0 =$

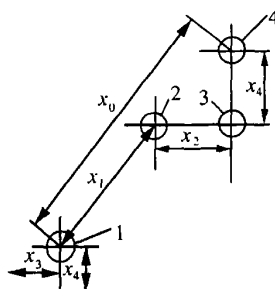


图 1 箱体上轴孔零件示意图
Fig.1 Upper axle hole element of box

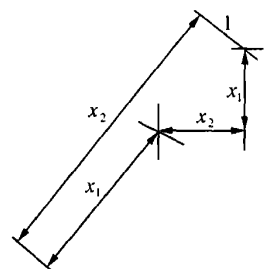


图 2 尺寸链示意图
Fig.2 Dimension chain

$(100, 70, 7, 70, 7)^T$, 其设计函数为:

$$200 - 0.07 \leq Y = x_1 + (x_2^2 + x_3^2)^{1/2} \leq 200 + 0.07$$

要求装配成功率为 99.73% (即 $\hat{d} = 0.9973$), 尺寸 x_1, x_2, x_3 的容差 - 成本函数均为

$$C_i(T) = \begin{cases} 8.239 e^{-35.8048T_i} + 1.307 e^{-\frac{0.0083}{T_i}}, & T_i \leq 0.13 \\ 1.23036, & T_i > 0.13 \end{cases}$$

另外尺寸 x_1, x_2, x_3 均服从正态分布 $N(0, \delta_i^2)$, 根据 3δ 原则, 有 $\delta = T_i/6, i = 1, 2, 3$.

此实例中, 在各尺寸经济加工范围内分配 3 个容差值, 进行实验设计求得各种容差组合下的加工成本, 生产成本, 装配成功率等, 实验结果如表 1 示.

表 1 实验结果

Tab. 1 Experiment outcome

实验号	最优容差/ μm 号			加工成本 / C_1	生产成本 / C_2	$\mu(C_1)$	$\mu(C_2)$	贴适度
	Δx_1	Δx_2	Δx_3					
1	35	46	46	8.7394	0.000317	0.1014	1.000	0.5507
2	35	46	74	7.8121	0.000367	0.1804	0.7347	0.4576
3	35	46	120	7.3934	0.000494	0.2339	0.3358	0.2849
4	35	74	46	7.8121	0.000364	0.1804	0.7484	0.4644
5	35	74	74	6.8848	0.000410	0.3209	0.5636	0.4423
6	35	74	120	6.4661	0.000538	0.4162	0.2560	0.3361
7	35	120	46	7.3934	0.000490	0.2339	0.3442	0.2891
8	35	120	74	6.4661	0.000531	0.4162	0.2673	0.3418
9	54	46	46	7.6681	0.000370	0.1972	0.7213	0.4593
10	54	46	74	6.7408	0.000413	0.3509	0.5533	0.4521
11	54	46	120	6.3221	0.000541	0.4551	0.2513	0.3532
12	54	74	46	6.7408	0.000413	0.3509	0.5533	0.4521
13	54	74	74	5.8135	0.000462	0.6242	0.4090	0.5166
14	54	74	120	5.3948	0.000588	0.8097	0.1881	0.4989
15	54	120	46	6.3221	0.000535	0.4551	0.2608	0.3580
16	54	120	74	5.3948	0.000578	0.8097	0.2001	0.5049
17	87	46	46	6.9095	0.000494	0.3160	0.3558	0.3259
18	87	46	74	5.9822	0.000545	0.5621	0.2452	0.4073
19	87	74	46	5.9822	0.000545	0.5621	0.2452	0.4073
20	87	74	74	5.0549	0.000589	1.000	0.1869	0.5935

注: 装配成功率小于 99.73% 的没有在表中列出.

从实验结果可得到加工成本和生产成本的最优值分别为 5.0549 和 0.000317. 由式(9) 得加工成本 (C_1) 和生产成本 (C_2) 的贴适度:

$$r_p = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \omega_j u(C_{pj}) = \frac{1}{2} \sum_{j=2}^2 \omega_j \exp \left[- \left(\frac{C_{pj} - C_j^*}{\sqrt{\frac{1}{20} \sum_{p=1}^{20} |C_{pj} - C_j^*|}} \right)^2 \right] \quad (10)$$

其中 $C_1^* = 5.0549, C_2^* = 0.000317$, 权系数 $\omega = (1, 1)$

由表 1 可见贴适度最大的为第 20 组, 因此该组即是最终的全局最优解. 表 2 是用 $CP^{[2]}$ 方法输出不同加权下的最优结果. 当 $\omega = (1, 1)$ 时, 表 2 的第 5 组为 CP 方法得出的最优结果 0.000413 (C_2) 虽然比 0.000589 小, 但相对地 6.7408 (C_1) 比 5.0549 的大得多. 故总成本较 CP 方法得到的总成本小. 由此提出的方法更有效.

表2 采用CP (Compromise Programming Approach) 方法的优化结果

Tab. 2 Optimization outcome by use of CP

实验号	最优容差/ μm			加工成本 $/C_1$	生产成本 $/C_2$	$(\omega_{c_1}, \omega_{c_2})$	β
	Δx_1	Δx_2	Δx_3				
1	54	46	46	7.6681	0.000370	(0.3, 0.7)	0.155089
2	54	74	74	5.8135	0.000462	(0.7, 0.3)	0.137224
3	35	74	74	6.8848	0.000410	(0.4, 0.6)	0.176025
4	54	74	74	5.8135	0.000462	(0.6, 0.4)	0.182965
5	54	46	74	6.7408	0.000413	(0.5, 0.5)	0.166759
6	54	74	46	6.7408	0.000413	(0.5, 0.5)	0.166759

注: 所用实验数据同表1

4 结束语

论文引入了模糊数学中的隶属度函数和贴近度理论, 利用模糊数学中的择近原则得到基于成本-质量模型这一多目标稳健设计的全局最优解. 并通过实例验证了该方法的有效性. 需要指出的是, 所选实例中采用的加权距离中的权系数取为 $\omega = (1, 1)$, 对不同的加权系数可得到不同的隶属度. 但是为了得到低成本高质量的产品, 建议加工成本(C_1)分配的加权系数应该小于等于生产成本(C_2)分配的加权系数. 另外, 模糊稳健优化设计方法是一种新的设计方法, 具有广阔的研究空间和应用前景.

参考文献:

- [1] 汪培庄. 模糊集合及其应用[M]. 上海: 上海科技出版社, 1983: 91~ 93.
- [2] Chen W, Wiecek M M, Zhang J. Quality Utility - a Compromise Programming Approach to Robust Design[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 1999, 121: 179~ 187.
- [3] 曹衍龙, 杨将新, 吴昭同. 基于模拟实验法的离散公差稳健设计[J]. 工程设计学报, 2003, 10(1): 11~ 14.
- [4] 于忠海. 基于模糊数学的稳健设计[J]. 机械设计, 2003, 20(7): 26~ 28.

(上接第117页)

$$\begin{aligned}
 \text{其中 } K_1 &= -\omega_0^2 + bnx_0y_0^0 \cos \omega_0 \tau_0 - lmx_0 \cos \omega_0 \tau_0 - c; \\
 K_2 &= l\omega_0 - bnx_0y_0 \sin \omega_0 \tau_0 + lmx_0 \sin \omega_0 \tau_0 - \omega_0; \\
 K_3 &= 2\omega_0(m x_0 \sin \omega_0 \tau_0 + \omega_0) + l(m x_0 \cos \omega_0 \tau_0 - c) - m x_0 \omega_0 \\
 &\quad (\omega_0 \cos \omega_0 \tau_0 + \omega_0^2 \sin \omega_0 \tau_0 + bnx_0y_0 \omega_0 \cos \omega_0 \tau_0 - bnx_0y_0 l \omega_0 \sin \omega_0 \tau_0); \\
 K_4 &= 2\omega_0(m x_0 \cos \omega_0 \tau_0 - c) - l(m x_0 \sin \omega_0 \tau_0 + \omega_0) + \\
 &\quad m x_0 \omega_0 (\omega_0 \cos \omega_0 \tau_0 + \omega_0 \sin \omega_0 \tau_0) - bnx_0y_0 (\omega_0 \sin \omega_0 - \omega_0 \cos \omega_0 \tau_0); \\
 \alpha(\tau_0) &= 0, \quad \omega(\tau_0) = \omega_0.
 \end{aligned}$$

从而当 $\frac{K_1 K_3 - K_2 K_4}{K_3^2 + K_4^2} \neq 0$ 时, 系统出现 Hopf 分支.

参考文献:

- [1] Tatyana Luzyanina, Koen Engelbo. Low Level Viral Persistence after Infection with LCMV: A Quantitative Insight Through Numerical Bifurcation Analysis[J]. Mathematical Biosciences, 2001, 173: 1~ 23.
- [2] 秦元勋, 刘永清, 王联, 等. 带有时滞的动力系统的运动稳定性[M]. 北京: 北京科学出版社, 1989. 103~ 108.