求解双曲守恒律方程的五阶紧凑 CWENO 格式

郑素佩[1], 封建湖[2], 曹志杰[3]
(1. 西北工业大学 理学院, 陕西 西安 710072; 2. 长安大学 理学院, 陕西 西安 710064;
3. 昆明理工大学 理学院, 云南 昆明 650093)

摘要: 提出一种新的求解双曲守恒律方程的五阶紧凑 CWENO 格式, 基于 Godunov 方法的思想, 该格式中每个模板上的重构多项式是单元均值意义下的插值多项式. 对空间方向上的重构, 引入了五阶紧凑 CWENO 格式, 重构多项式是基于不同模板上的插值多项式的凸组合. 该方法的核心是: 首先构造一个最优 4 次多项式, 通过凸组合的形式使解在光滑区域达到五阶精度, 在间断区域, 凸组合的权值会自适应地选择单个模板上的三阶插值多项式, 从而避免了伪震荡的产生(WENO 思想). 这种新的五阶重构格式是基于非常紧凑的五点模板构造的. 最后此格式的精确性、稳定性及高分辨率性通过一维算例给以验证.

关键词: 双曲守恒律; 中心差分格式; CWENO 重构; 紧凑 CWENO 重构
中图分类号: O242; O354 文献标识码: A 文章编号: 1007- 855X(2005)01- 0118- 03

Fifth- Order Compact Central WENO Schemes for Conservation Laws

ZHENG Su-pei, FENG Jian-hu, CAO Zhi-jie
(1. School of Science, Northwestern Polytechnical University, Xi' an 710072, China; 2. School of Science, Chang' an University, Xi' an 710064, China; 3. Faculty of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, China)

Abstract: A new fifth- order central compact scheme for approximating solutions to conservation laws is presented. In the spirit of Godunov- type, this method is based on reconstructing a piecewise- polynomial interpolant from cell- average. In the reconstruction step, a new fifth- order, compact, central weighted essentially nonoscillatory reconstruction is introduced, which is written as a convex combination of interpolants based on different stencils. The core is that one of these interpolants are taken as a suitable fifth polynomial, and the weights of the convex combination are set to obtain fifth- order accuracy in smooth regions. The embedded mechanism in the WENO- like schemes guarantees that in regions with discontinuities or large gradients, there is an automatic switch to a one - sided third- order reconstruction, which prevents the creation of spurious oscillations. The new fifth- order reconstruction is based on an extremely compact five- point stencil. The accuracy, robustness and high- resolution properties of this scheme are demonstrated in a variety of one- dimensional problems.
Key words: hyperbolic laws; central difference schemes; CWENO reconstruction; compact CWENO reconstruction

0 引言

近年来双曲守恒律方程: $u_t + \nabla_x \cdot f(u) = 0 \quad x \in R^d \quad u = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 的近似解问题吸引了很多人的注意, 在众多的求解方法中, 有限差分法是一种重要的求解方法. 近年来人们对中心差分格式(以下简称中心格式) 进行了广泛的研究, Bianco 和 Puppo 推导出用于求解双曲守恒律方程的高阶中心格式[1], 此格式是基于 ENO 格式思想构造的. 此后 Levy 和 Puppo 基于 WENO 格式提出了 CWENO 格式[2,3], 此格式中的插值多项式是基于不同模板上的插值多项式的凸组合(WENO 思想), 通过这种凸组合的形式使解在光滑区域达到尽可能高的精度, 在间断区域插值多项式自适应地选择单个模板上的插值多项式, 从而避免了伪震荡的产生. 后来 Levy 和 Puppo 又将 CWENO 格式推广到二维空间, 并对整体变量的 CWENO 格式进行了研究. 近年来 Levy 和 Puppo 对紧凑 CWENO 格式进行研究, 在文献[4] 中他们构

收稿日期: 2004- 04- 16.
第一作者简介: 郑素佩(1978~), 女, 在读硕士研究生. 主要研究方向: 科学与工程的高性能计算技术. **E- mail:** hazsp@eyou. com

造了三阶紧凑的 CWENO 格式. 文中采用的差分格式是基于三阶紧凑 CWENO 格式上的五阶紧凑 CWENO 格式, NCE(Natural Continuous Extension) 的 RK (Runge- Kutta) 方法包括在内. 此格式具有紧凑性、精确性、无震荡性等优点. 最后通过几个数值算例验证所构造的格式.

1 格式构造

以双曲守恒律方程

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 \\ u(x, t = 0) = u_0(x) \end{cases} \tag{1}$$

为例引进新的五阶紧凑 CWENO 格式. 为简单起见, 可以在 (x, t) 平面内采用均匀网格, 分别记 $h = \Delta x$, $k = \Delta t$, 用 $\overline{u}_j^n$ 表示单元 $I_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ 上 t^n 时刻 $x_j = jh$ 位置的单元均值. 有限差分法是基于 t^n 时刻的数值解推导出 t^{n+1} 时刻的数值解. 首先用 $\overline{u}_j^n$ 构造一个分片多项式插值 $P_u(x, t^n)$: $P_u(x, t^n) = \sum_j R_j(x)\chi_j$, 其中 χ_j 是区间 I_j 上的特征函数, $R_j(x)$ 是区间 I_j 上的插值多项式. 若对(1) 式两端同时在区间 $[t^n, t^{n+1}] \times [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ 上求二重积分, 则有

$$\overline{u}_{j+1/2}^{n+1} = \overline{u}_{j+1/2}^n + \frac{1}{h}\int_{t^n}^{t^{n+1}} [f(u(x_j, \tau)) - f(u(x_{j+1}, \tau))] \mathrm{d}\tau = I + II \tag{2}$$

以下为算法步骤:

第一步, 计算 $R_j(x)$ 的系数.

$$R_j(x) = u_j + u_j'(x - x_j) + \frac{1}{2!}u_j''(x - x_j)^2 + \frac{1}{3!}u_j^{(3)}(x - x_j)^3(x - x_j)^3 + \frac{1}{4!}u_j^{(4)}(x - x_j)^4 \tag{3}$$

这是文章的核心所在. 基于文献[4] 中提到的紧凑 CWENO 思想, 首先在五点模板上构造一个单元均值四次最优多项式 $P_{OPT,j}(x)$, 满足:

$$\frac{1}{h}\int_{x_{j+l-1/2}}^{x_{j+l+1/2}} P_{OPT,j}(x)\mathrm{d}x = \overline{u}_{j+l}^n \qquad l = -2, -1, 0, 1, 2$$

此关系完全确定了四次最优多项式. 为防止伪震荡的产生, 基于文献[2, 5, 6] 中所用到的 WENO 思想, 构造一个基于不同模板上的插值多项式的凸组合:

$$R_j = \sum_i w_i^j P_i^j(x) \qquad \sum_i w_i^j = 1 \quad w_i^j \geq 0, \quad i \in \{j - 1, j, j + 1, j + 2\} \tag{4}$$

其中 $P_i^j(x)(i = j - 1, j, j + 1)$ 是单元 $I_i(i = j - 1, j, j + 1)$ 上的插值多项式(为简单起见省略上标), 满足:

$$\begin{cases} \frac{1}{h}\int_{I_{k-1}} P_k(x)\mathrm{d}x = \overline{u}_{K-1} \\ \frac{1}{h}\int_{I_k} P_k(x)\mathrm{d}x = \overline{u}_K \\ \frac{1}{h}\int_{I_{k+1}} P_k(x)\mathrm{d}x = \overline{u}_{k+1} \end{cases} \qquad k = j - 1, j, j + 1 \tag{5}$$

为了使凸组合(4) 在光滑区域达到五阶精度, P_{j+2} 须满足:

$$P_{OPT,j}(x) = C_{j-1}P_{j-1}(x) + C_{j+1}P_{j+1}(x) + C_{j+2}P_{j+2}(x)$$
$$\sum_i C_i = 1, i \in \{j - 1, j, j + 1, j + 2\} \tag{6}$$

直接推导表明常数 C_i 必须满足条件: $C_{j-1} = C_j = C_{j+1} = \frac{1}{12}$, $C_{j+2} = \frac{3}{4}$ 解才能达到预期的精度. 由式子(3), (4) 可求出系数 $u_j, u'_j, u''_j, u_j^{(3)}, u_j^{(4)}$. 权值 w_i^j 的算法可参看文献[5, 6].

第二步, 求解 I.

$$I = \overline{u}_j^n + 1/2 = \frac{1}{h}\int_{x_j}^{x_{j+1}} P_u(x, t^n)\mathrm{d}x = \frac{1}{h}[\int_{x_j}^{x_{j+1/2}} R_j(x)\mathrm{d}x + \int_{x_{j+1/2}}^{x_{j+1}} R_{j+1}(x)\mathrm{d}x]$$

$$= \frac{u_j + u_{j+1}}{2} + \frac{u'_j - u'_{j+1}}{8}h + \frac{u''_j + u''_{j+1}}{48}h^2 + \frac{u_j^{(3)} - u_{j+1}^{(3)}}{348}h^3 + \frac{u_j^{(4)} + u_{j+1}^{(4)}}{3\,480}h^4$$

$R_j(x)$ 的系数在第一步已算出.

第三步, 求解 II. 用牛顿 —— 科特斯求积公式, 该公式可达到五阶精度, 对公式中用到的区间 $[t^n, t^{n+1}]$ 中的值可以采用四阶 NCE 的 RK 方法求解[5].

2 数值算例

下面通过具体的数值算例来验证所构造的格式, 以下各算例的边界条件均按周期性边界条件处理. 各图中'o' 表示数值解, '–' 表示精确解.

例 **1** 线性方程:

$$u_t + u_x = 0 \qquad -1 \le x \le 1; \qquad u(x, 0) = \exp(-300x^2)$$

在时刻 $t = 0.5$ 的解如图 1 所示.

例 **2** Buckley – Leverett 通量方程:

$$u_t + \left[\frac{4u^2}{4u^2 + (1-u)^2}\right]_x = 0 \qquad -1 \le x \le 1; \qquad u(x, 0) = \begin{cases} 1 & -0.5 \le x \le 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

在时刻 $t = 0.4$ 的解如图 2 所示.

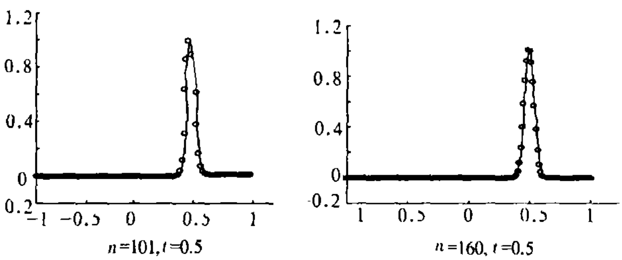

图 1 线性方程问题

Fig. 1 linear equation problem

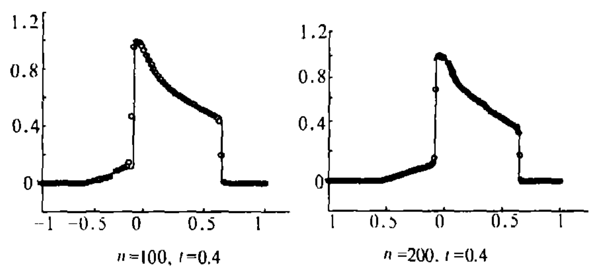

图 2 Buckley – Leverett

Fig. 2 Buckley – Leverett problem

3 结 论

有限差分法是求解双曲守恒律方程的一种重要方法. 由于 WENO 格式选取的模板过大, 使其在边界处理上非常麻烦, 这个缺点阻碍了 WENO 格式的推广. 对 CWENO 格式, 随着精度的提高, 在激波附近会产生一些震荡. 而文中所用的紧凑格式计算简单、快捷、且在激波附近防止了伪震荡的产生; 该格式所选模板较小: 五阶格式只需五点模板; 解在光滑区域可达到五阶精度, 数值解与精确解的吻合程度相当好, 在间断区域, 解至少可以达到三阶精度, 耗散现象明显降低; 在时间层的处理上引入了 NCE 的 RK 处理方法, 从而使该格式达到很好的计算效果. 几个典型的数值算例结果令人满意. 证明文中所构造的求解双曲守恒律的差分格式是十分有效的. 紧凑格式的诸多优点使其成为近年来研究的热点.

参考文献:

[1] Bianco F, Puppo G, Russo G. High Order Central Schemes for Hyperbolic Systems of Conservation Laws[J]. SIAM J. Sci. Comput, 1999, 21: 294~322.

[2] Levy D, Puppo G, Russo G. Central WENO Schemes for Hyperbolic Systems of Conservation Laws[J]. Math. Model. Numer. Anal, 1999, 33: 547~571.

[3] Levy D, Puppo G, Russo G. A Third Order Central WENO Scheme for 2D Conservations Laws[J]. Appl. Numer. Math, 2000, 33: 415~421.

[4] Levy D, Puppo G, Russo G. Compact Central WENO Schemes for Multidimensional Conservation Laws[J]. SIAM J. Sci. Comput. 2000, 22: 656~672.

[5] Liu X D, Osher S, Chan S. Weighted Essentially Nonoscillatory Schemes[J]. Comput. Phys, 1994, 115: 200~212.

[6] Jiang G S, Shu C W. Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes[J]. Comput. Phys, 1996, 126: 202~228.