

求解浅水波方程的半离散中心迎风方法

刘彩侠¹, 封建湖², 曹志杰³

(1. 西北工业大学 理学院, 陕西 西安 710072; 2. 长安大学 理学院, 陕西 西安 710064;
3. 昆明理工大学 理学院, 云南 昆明 650093)

摘要: 提出了一种新的求解浅水波方程黎曼问题的半离散中心迎风差分方法. 该方法以求解双曲守恒律方程的半离散中心迎风方法为基础, 将其应用到 Jin's 的界面方法中. 对于源项, 不是采用传统的单元均值, 而是采用单元界面处的值来近似, 使所得格式对稳态的求解是均衡的. 且已证明所给的二阶精度的求解格式保持水深的非负性, 这一特性使其能够较好地处理干河床问题.

关键词: 浅水波方程; 中心迎风; CWENO; 半离散

中图分类号: 0240; 0353 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007 - 855X(2005) 03 - 0127 - 04

Semi-Discrete Central-Upwind Approach to Shallow Water Equations

LU Cairxia¹, FENG Jian-hu², CAO Zhijie³

(1. School of Science, Northwest Polytechnical University, Xi'an 710072, China; 2. School of Science, Chang'an University, Xi'an 710064, China; 3. Faculty of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, China)

Abstract: A new semi-discrete central-upwind approach to shallow water equation is put forward in this paper. Based on extending semi-discrete central-upwind schemes for hyperbolic conservation law equations, this method is applied in Jin's interface. The interface value, rather than the cell-average, is adopted as the source terms, which results in a well-balanced scheme that can capture the steady solution. It is also proved that the second-order version of this approach preserves the non-negativity of the height of the water, which guarantees a better solution for dry river-beds.

Key words: shallow water equation; central-upwind; CWENO; semi-discrete

0 引言

考虑浅水波方程 (1)

$$W_t + f(W)_x = S \quad (1)$$
$$W = \begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix}, f(W) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + gh^2/2 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 0 \\ -ghB_x \end{bmatrix}$$

其中: $B(x)$ 为床面底高程函数, g 是重力加速度, h 是水深, u 为速度向量.

自然界中很多现象都可以用 (1) 式来描述. 常见的浅水动力模拟应用实例有河道流量及洪水预报、洪水漫滩、近海风暴潮、溃坝决堤等. 因此有关浅水波方程的求解近年来倍受关注. 本文给出了一种新的求解浅水波方程的四阶半离散中心迎风方法. 该方法以求解双曲守恒律方程的方法^[1]为基础, 将其应用到 Jin's 的界面方法^[2]中. 一阶中心格式是在 1954 年由 Lax 和 Friedrich 提出的, 随后又出现了许多高阶精度的交错中心差分格式, 它们都可以认为是格式的推广, 如 [3]. 它们虽然具有一般中心差分格式的优点, 但通过分析截断误差可知, 这些交错的中心格式产生的数值粘性与 $O(\Delta x^{2r}/t)$ 同阶, 故当较小时, 在间断或

收稿日期: 2004 - 06 - 29.

第一作者简介: 刘彩侠 (1978 ~), 女, 硕士. 主要研究方向: 计算数学. E-mail: lcxnwp@eyou.com

梯度较大的地方会形成一个较大的过渡区域. 为克服此缺点, 高分辨率的中心半离散差分方法应运而生. A. Kurganov与 E. Tadmor在文献[4]中首次提出用高分辨率的二阶中心半离散方法来求解守恒律方程及对流扩散方程; 随后 A. Kurganov与 E. Tadmor在文献[1]中给出了三阶半离散中心迎风求解方法. 本文正是基于[1]构造了一种新的四阶半离散中心迎风格式求解浅水波方程.

1 中心迎风格式

方便起见考虑均匀网格, 记空间步长为 Δx , 记 $\bar{u}_j(t)$ 为 $u(x, t)$ 在单元 $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ 上的单元均值:

$$\bar{u}_j(t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t) dx \quad (2)$$

引入空间分片插值多项式重构, $u(x, t) \approx \sum_j P_j(x, t) \bar{u}_j(t)$, 其中: $P_j(x)$ 是单元 I_j 上的满足一定精度要求的 CWENO分片插值多项式, $\bar{u}_j(t)$ 是单元 $I_j = I(x_j)$ 上的特征多项式. 求解(1)的半离散中心迎风格式为^{[1],[2]}:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{u}_j(t) &= - \frac{H_{j+1/2}(t) - H_{(j-1/2)}(t)}{\Delta x} - g \frac{h_{j-1/2}^+ + h_{j-1/2}^-}{2} \frac{B(x_{j+1/2}) - B(x_{j-1/2})}{\Delta x} \\ H_{j+1/2}(t) &= \frac{a_{j+1/2}^+ f(\bar{u}_{j+1/2}^+(t)) - a_{j+1/2}^- f(\bar{u}_{j+1/2}^-(t))}{a_{j+1/2}^+ - a_{j+1/2}^-} + \frac{a_{j+1/2}^+ a_{j+1/2}^-}{a_{j+1/2}^+ - a_{j+1/2}^-} [\bar{u}_{j+1/2}^+(t) - \bar{u}_{j+1/2}^-(t)] \\ a_{j+1/2}^- &= \min\left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial u}(\bar{u}_{j+1/2}^-) \right), \left(\frac{\partial f}{\partial u}(\bar{u}_{j+1/2}^+) \right), 0 \right\}, \bar{u}_{j+1/2}^- = P_j(x_{j+1/2}, t) \\ a_{j+1/2}^+ &= \max\left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial u}(\bar{u}_{j+1/2}^-) \right), \left(\frac{\partial f}{\partial u}(\bar{u}_{j+1/2}^+) \right), 0 \right\}, \bar{u}_{j+1/2}^+ = P_{j+1}(x_{j+1/2}, t) \end{aligned} \quad (3)$$

注 1 针对(1)中右端项的近似我们采用文献[2]中的处理方法, 此时源项采用的是二阶精度近似. [2]中右端源项为:

$$- g \frac{h_{j+1/2}^+ + h_{j-1/2}^-}{2} \frac{B(x_{j+1/2}) - B(x_{j-1/2})}{\Delta x}$$

2 干河床问题

如果在某些区域水深 h 很小, 那么即使很小的数值震荡都可能导致水深为负值, 从而左、右波速也就不存在, 导致以上所给格式失败. 针对这一问题, 我们给出下面的定理.

考虑(3)的第一个表达式:

$$\frac{d}{dt} \bar{h}_j = - \frac{H_{j+1/2}^{(1)} - H_{(j-1/2)}^{(1)}}{\Delta x} \quad (4)$$

其中:

$$H_{j+1/2}^{(1)}(t) = \frac{a_{j+1/2}^+ (hu)_{j+1/2}^- - a_{j+1/2}^- (hu)_{j+1/2}^+}{a_{j+1/2}^+ - a_{j+1/2}^-} + \frac{a_{j+1/2}^+ a_{j+1/2}^-}{a_{j+1/2}^+ - a_{j+1/2}^-} [\bar{u}_{j+1/2}^+(t) - \bar{u}_{j+1/2}^-(t)] \quad (5)$$

定理 针对方程(1), 考虑中心迎风格式(3), 其中 $h_{j+1/2}^\pm, (hu)_{j+1/2}^\pm$ 是守恒变量 h, hu 的满足保持单调性、TVD性质的插值重构. 假设用向前欧拉算法求解常微分方程, 则对 $\forall j, \bar{h}_j^n \geq 0$, 如果 $t \leq \Delta x/4a$, 其中: $a = \max_j \{ \max(a_{j+1/2}^+, -a_{j+1/2}^-) \}$, 则 $\forall j, \bar{h}_j^{n+1} > 0$

证明 中心迎风格式(4)结合 $h_{j+1/2}^\pm, (hu)_{j+1/2}^\pm$ 的构造及向前欧拉算法知(5)变形为:

$$\bar{h}_j^{n+1} = \bar{h}_j^n - (H_{j+1/2}^{(1)} - H_{(j-1/2)}^{(1)}) \Delta t = \frac{-t}{x} \quad (6)$$

如果 $\forall j, \bar{h}_j^n \geq 0, h_{j+1/2}^\pm, (hu)_{j+1/2}^\pm$ 是守恒变量 h, hu 的满足保持单调性、TVD性质的插值重构, 则 $\forall j, h_{j+1/2}^\pm \geq 0, \bar{h}_j^n = (h_{j-1/2}^+ + h_{j+1/2}^-)/2$, (6)式可以写成下面的形式:

$$\begin{aligned} \bar{h}_j^{n+1} = & \left[\frac{1}{2} + \frac{a_{j-1/2}^+}{a_{j-1/2}^+ - a_{j-1/2}^-} (a_{j-1/2}^+ - u_{j-1/2}^+) \right] h_{j-1/2}^+ + \left[\frac{1}{2} - \frac{a_{j+1/2}^+}{a_{j+1/2}^+ - a_{j+1/2}^-} (u_{j+1/2}^- - a_{j+1/2}^-) \right] h_{j+1/2}^- \\ & + \left[\frac{a_{j+1/2}^-}{a_{j+1/2}^+ - a_{j+1/2}^-} (a_{j+1/2}^+ - u_{j+1/2}^+) \right] h_{j+1/2}^+ + \left[\frac{a_{j-1/2}^+}{a_{j-1/2}^+ - a_{j-1/2}^-} (u_{j-1/2}^- - a_{j-1/2}^-) \right] h_{j-1/2}^- \end{aligned} \quad (7)$$

其中: $u_{j\pm 1/2}^\pm = (hu)_{j\pm 1/2}^\pm / h_{j\pm 1/2}^\pm$. (7) 式中的局部波速为:

$$\begin{aligned} a_{j+1/2}^+ &= \max(u_{j+1/2}^+ + \sqrt{h_{j+1/2}^+}, u_{j+1/2}^- + \sqrt{h_{j+1/2}^-}, 0) \\ a_{j+1/2}^- &= \min(u_{j+1/2}^+ - \sqrt{h_{j+1/2}^+}, u_{j+1/2}^- - \sqrt{h_{j+1/2}^-}, 0) \end{aligned}$$

因此, $\forall j, a_{j+1/2}^+ \geq 0, a_{j+1/2}^- \leq 0, a_{j+1/2}^+ - u_{j+1/2}^+ \geq 0, a_{j+1/2}^- - u_{j+1/2}^- \leq 0$, 所以 (7) 式的后两项非负. 在 $\leq 1/4a$ 的情况下 (7) 式的前两项也非负. 故 $\forall j, \bar{h}_j^{n+1} > 0$, 证毕.

注 2 当 $h \rightarrow 0$ 时, 类似于空气动力学中的真空情形, 即使很小的数值扰动都可能导致水深为负值, 故一般的高阶精度的求解格式失败. 在初始时刻给定位于 $x = x_0$ 的间断 $(h_l, u_l, v_l) \setminus (h_r, u_r, v_r)$, 为不出现干河床必须满足条件^[5]:

$$h_l > 0, h_r > 0, \text{且 } u_r - u_l < 2(a_r - a_l)$$

注 3 由定理知处理干河床问题时, 可采用一次线性插值^[4], 得到二阶精度的求解格式; 对非干河床问题采用文献 [3] 的四阶 CWENO 重构.

3 数值算例

为在时间方向实现四 (二) 阶近似, 采用四 (二) 阶 SSP Runge - Kutta 方法求解常微分方程 (3). 如无特别说明, 圆圈为本文求解格式的结果, 实线是精确解, 节点数 $N = 100$

算例 1 考虑黎曼问题 (非干河床问题):

$$(h, u) = \begin{cases} (1, 0, 2, 5) & x < 10 \\ (0, 1, 0, 0) & x > 10 \end{cases}, B(x) = 0$$

求解区域为: $[0, 50]$, $T = 7.0$ 时的解见图 1

算例 2 考虑黎曼问题 (右干河床问题):

$$(h, u) = \begin{cases} (1, 0, 0, 0) & x < 20 \\ (0, 0, 0, 0) & x > 20 \end{cases}, B(x) = 0$$

求解区域为: $[0, 50]$, $T = 4.0$ 时的解见图 2

算例 3 考虑黎曼问题:

$$(h, u) = \begin{cases} (4, -10) & x < 0.5 \\ (1, -6) & x > 0.5 \end{cases}, B(x) = 1.398 - 0.347 \tan h(8x - 4)$$

求解区间为 $[0, 1]$, 结果见图 3, 图 4 是本文格式的结果, 由文献 [2] 知该格式给出了正确的解.

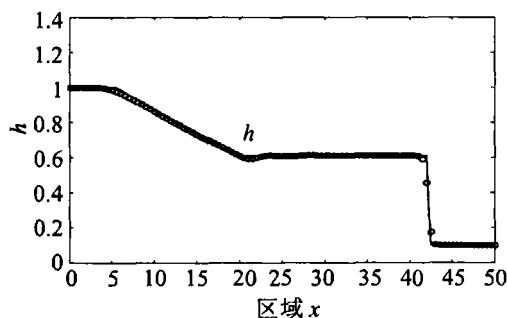


图1 区域 $[0, 50]$ $T=7.0$ 的解
Fig.1 Solution to domain $[0,50]$ $T=7.0$

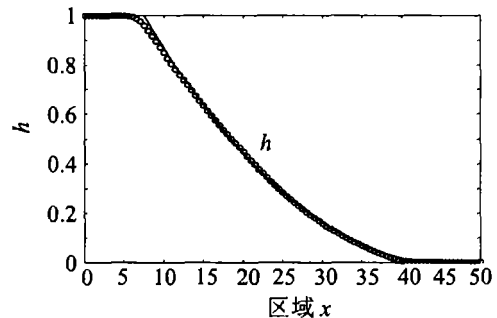


图2 区域 $[0, 50]$ $T=4.0$ 的解
Fig.2 Solution to domain $[0,50]$ $T=4.0$

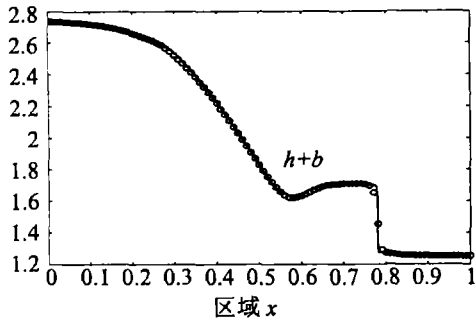


图3 区域 $[0, 1]$ $T=0.25$ 的解
Fig.3 Solution to domain $[0,1]$ $T=0.25$

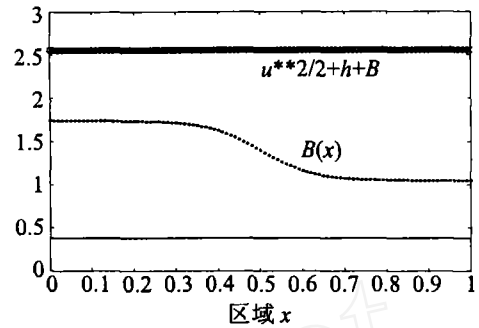


图4 算例稳定态
Fig.4 Steadystate of the examples

4 结论

本文构造了一种新的高阶精度的、高分辨率的中心半离散格式. 该方法在提高精度的同时为了进一步减小数值耗散, 在数值重构的过程中引入了左、右局部波速, 而且对常微分方程的求解采用了具有强收敛性的 SSP Runge - Kutta 方法. 数值算例给出了较为满意的结果.

参考文献:

- [1] Kurganov A, Nolle S, Petrova G Semi - discrete central - upwind scheme for hyperbolic conservation laws and Hamilton - Jacobi equations[J]. SIAM J. Sci Comput , 2001, 23: 707 ~ 740.
- [2] Jin S, Wen X. An efficient method for computing hyperbolic systems with geometrical source terms having concentrations[J]. J. Comp. Math , 2004, 22: 230 ~ 249.
- [3] Levy D, Puppo G, Russo G Central WENO schemes for hyperbolic systems of conservation laws[J]. Appl Numer Math Anal , 1999, 33: 547 ~ 571.
- [4] Kurganov, Tadmor E New high - resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection - diffusion equations[J]. J. Comput Phys , 2000, 160: 241 ~ 282.
- [5] Toro E F. Shock - capturing methods for free - surface shallow flows[M]. John Wiley & Sons, 2001.