第26卷 第6期　　昆 明 理 工 大 学 学 报　　Vol.26 No.6
2001年12月　　Journal of Kunming University of Science and Technology　　Dec.2001

混合型解析函数的 Schwarz 边值问题①

张建元，张荣珠

（昭通师范高等专科学校，云南 昭通 657000）

摘要 在混合型解析函数集 $\mathscr{H}^*$ 上给出了 Schwarz 混合型积分，并用它来求 $\mathscr{H}^*(K)$ 类中 Schwarz 和 Dirichlet 边值问题的解，所得结论包括了前人的有关结果.

关键词：混合型解析函数；Poisson 混合型积分；Schwarz 混合型积分；Schwarz 边值问题；Dirichlet 边值问题

中图分类号：O175.5　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1007－855X(2001)06－145－06

1 基本概念

定义 1.1 在区域 G 中具有形式 $F(z)+\Phi(z)$（其中 $F(z)$ 是共轭解析的，$\Phi(z)$ 是解析的）的函数称为混合型解析函数.所有 G 内的混合型解析函数的全体记为 $\mathscr{H}^*(G)$.

由 $\mathscr{H}^*(G)$ 中元素表达式的唯一性（略去一对互为相反常数加项）[1] 知，$\forall\, w(z)\in\mathscr{H}^*(G)$，有 $w(z)=CAw(z)+Aw(z)$，这里，$CAw(z)\triangleq F(z)$，$Aw(z)\triangleq\Phi(z)$，分别称为 $w(z)$ 的共轭解析和解析加项.

定理 1.1[1] 设区域 G 的边界为 L，$\bar G=G+L$.如果 $w(z)\in\mathscr{H}^*(G)$，$w(z)\in C(\bar G)$（这里 $C(\bar G)$ 为 $\bar G$ 上连续函数的全体）.则

$$w(z)=\frac{-1}{2\pi i}\int_L\frac{CAw(t)}{\bar t-\bar z}\overline{dt}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{Aw(t)}{t-z}dt.\qquad(z\in G)$$

定理 1.2 设 $K:|z-z_0|<R$，$\bar K:|z-z_0|\leqslant R$.如果 $w(z)\in\mathscr{H}^*(K)$，且 $w(z)\in C(\bar K)$.则 $w(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}w(z_0+Re^{i\theta})d\theta$.

证 明 因 $\bar K$ 的边界 $L:|t-z_0|=R$，即 $t-z_0=Re^{i\theta}$，$(0\leqslant\theta<2\pi)$ $dt=iRe^{i\theta}d\theta$，$d\theta=\frac{dt}{i(t-z_0)}=\frac{\overline{dt}}{-i(\bar t-\bar z_0)}$.由定理 1.1 得

$$\begin{aligned}w(z_0)&=\frac{-1}{2\pi i}\int_L\frac{CAw(t)}{\bar t-\bar z_0}\overline{dt}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{Aw(t)}{t-z_0}dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[CAw(z_0+Re^{i\theta})+Aw(z_0+Re^{i\theta})]d\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}w(z_0+Re^{i\theta})d\theta.\end{aligned}$$

特别当 $z_0=0$ 时，$w_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}w(Re^{i\theta})d\theta$.

定理 1.3 设 $K:|z|<R$，$\bar K:|z|\leqslant R$，$\bar K$ 的边界 $L:|t|=R$.如果 $w(z)\in\mathscr{H}^*(K)$，且 $w(z)\in C(\bar K)$，则

$$w(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}w(Re^{i\theta})\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta,$$

① **收稿日期**：2001－07－20；
第一作者简介：张建元，男，1956年生，讲师.研究方向：复变函数，边值问题.

且 $$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(Re^{i\theta})\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta,\qquad(z=re^{i\varphi}\in K)\tag{1}$$

这里 $u(z)=\mathrm{Re}w(z)$.

证 明 $\forall\, w(z)\in\mathscr{H}^*(K)$,由定理1.1得

$$w(z)=\frac{-1}{2\pi i}\int_L\frac{CAw(t)}{\bar t-\bar z}\overline{dt}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{Aw(t)}{t-z}dt\triangleq I_1(z)+I_2(z).\qquad(z\in K)$$

而 $I_2(z)\triangleq\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{Aw(t)}{t-z}dt$, 取 z 关于 $L:|t|=R$ 的对称点 $z^*=\frac{R}{\bar z}$,

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{Aw(t)}{t-z^*}dt=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{Aw(t)}{t-\frac{R^2}{\bar z}}dt=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\bar zAw(t)}{(\bar z-\bar t)t}dt.$$

上两式积分相减得

$$\begin{aligned}I_2(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_L Aw(t)\left[\frac{1}{t-z}-\frac{\bar z}{t(\bar z-\bar t)}\right]dt\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_L Aw(t)\left[\frac{t}{t-z}-\frac{\bar z}{\bar z-\bar t}\right]\frac{dt}{t}\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_L Aw(t)\frac{|t|^2-|z|^2}{|t-z|^2t}dt.\end{aligned}$$

设 $z=re^{i\varphi}$, $t=Re^{i\theta}$, $(0\leqslant r\leqslant R,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$, $dt=itd\theta$, $d\theta=\frac{dt}{it}$,

$$I_2(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Aw(Re^{i\theta})\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta$$

同理,

$$I_1(z)\triangleq\frac{-1}{2\pi i}\int_L\frac{CAw(t)}{\bar t-\bar z}\overline{dt}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}CAw(Re^{i\theta})\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta.$$

从而

$$\begin{aligned}w(z)&=I_1(z)+I_2(z)\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[CAw(Re^{i\theta})+Aw(Re^{i\theta})]\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}w(Re^{i\theta})\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta.\end{aligned}$$

设 $w(z)=\mathrm{Re}w(z)+i\,\mathrm{Im}w(z)=u(z)+iv(z)$,其中 $u(z)=\mathrm{Re}w(z)=\mathrm{Re}[CAw(z)]+\mathrm{Re}[Aw(z)]\triangleq u_1(z)+u_2(z)$,比较实部得

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(Re^{i\theta})\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta.$$

(1)式有时也写为 $u(z)\triangleq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(t)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta$,并称它为普阿松(Poisson)混合型积分.

由定理的证明过程知 $\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}=\frac{t}{t-z}-\frac{\bar z}{\bar z-\bar t}=\frac{1}{2}\left[\frac{t+z}{t-z}+\overline{\left(\frac{t+z}{t-z}\right)}\right]=\mathrm{Re}\overline{\left(\frac{t+z}{t-z}\right)}$,积分(1)为积分 $f(z)\triangleq\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{u_1(t)}{\bar t}\overline{\left(\frac{t+z}{t-z}\right)}\overline{dt}+\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{u_2(t)}{t}\left(\frac{t+z}{t-z}\right)dt$ 的实部.

定义1.2 设 $u(t)=u_1(t)+u_2(t)$,其中 $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$ 分别是 $L:|t|=R$ 上给定的共轭可积和可积(实)函数.称积分:$Su(z)\triangleq\frac{-1}{2\pi i}\int_L\frac{u_1(t)}{\bar t}\overline{\left(\frac{t+z}{t-z}\right)}\overline{dt}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{u_2(t)}{t}\left(\frac{t+z}{t-z}\right)dt$ 为Schwarz混合型积

分.

性质 1.4 如果 $u(t)=u_1(t)+u_2(t)$ 中 $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$ 都是圆 $L: |t|=R$ 上给定的连续(实)函数, 则: (1) $Su(z)$ 是 $K: |z|<R$ 内的混合型解析函数; (2) $\mathrm{Re}[Su(t)]=u(t)$, 这里 $\mathrm{Re}[Su(t)]=\lim\limits_{\substack{z\to t\\ z\in K}}\mathrm{Re}[Su(z)]$.

证 明 $Su(z)=\dfrac{-1}{2\pi i}\displaystyle\int_L\frac{u_1(t)}{\bar t}\overline{\left(\frac{t+z}{t-z}\right)}\,\overline{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{u_2(t)}{t}\left(\frac{t+z}{t-z}\right)\mathrm{d}t=I_1(z)+I_2(z)$.

(1) 因 $I_1(z)\triangleq\dfrac{-1}{2\pi i}\displaystyle\int_L\frac{u_1(t)}{\bar t}\overline{\left(\frac{t+z}{t-z}\right)}\,\overline{\mathrm{d}t}=\frac{-1}{2\pi i}\int_L\frac{u_1(t)}{\bar t-\bar z}\overline{\mathrm{d}t}-\frac{\bar z}{2\pi i}\int_L\frac{u_1(t)}{(\bar t-\bar z)\bar t}\overline{\mathrm{d}t}$

与 $I_2(z)\triangleq\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L\frac{u_2(t)}{t}\left(\frac{t+z}{t-z}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{u_2(t)}{t-z}\mathrm{d}t+\frac{z}{2\pi i}\int_L\frac{u_2(t)}{(t-z)t}\mathrm{d}t$ 分别是 Cauchy 型共轭积分和 Cauchy 型积分, 当 $z\in K$ 时, 它们分别是共轭解析[2] 和解析的函数. 于是 $Su(z)$ 是 K 内的混合型解析函数.

(2) 因 $\mathrm{Re}[Su(z)]=\mathrm{Re}[I_1(z)+I_2(z)]=\mathrm{Re}[I_1(z)]+\mathrm{Re}[I_2(z)]$, 设 $t=Re^{i\theta}$, $z=re^{i\varphi}$, $(0\leqslant r<R,\ 0\leqslant\theta<2\pi)$, 由调和函数的性质[3] 得

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}[I_1(z)]&=\mathrm{Re}\left[\frac{-1}{2\pi i}\int_L\frac{u_1(t)}{\bar t}\overline{\left(\frac{t+z}{t-z}\right)}\,\overline{\mathrm{d}t}\right]\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u_1(t)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\mathrm{d}\theta=u_1(z)\\\mathrm{Re}[I_2(z)]&=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{u_2(t)}{t}\left(\frac{t+z}{t-z}\right)\mathrm{d}t\right]\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u_2(t)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\mathrm{d}\theta=u_2(z)\end{aligned}$$

且 $$\lim_{\substack{z\to t\\ z\in K}}u_1(z)=u_1(t),\ \lim_{\substack{z\to t\\ z\in K}}u_2(z)=u_2(t).$$

从而 $$\mathrm{Re}[Su(z)]=u_1(z)+u_2(z)\triangleq u(z),$$

且 $$\lim_{\substack{z\to t\\ z\in K}}\mathrm{Re}[Su(z)]=\lim_{\substack{z\to t\\ z\in K}}u(z)=u_1(t)+u_2(t)=u(t).$$

即 $$\mathrm{Re}[Su(t)]=u(t).\qquad(t\in L)$$

备 注 性质 **1.4** 中条件可减弱为 $u_i(t)\ (i=1,2)$ 在 L 上除去有限个第一类间断点外处处连续, 则 $Su(z)\in\mathscr{H}^*(K)$, 且在非间断处有 $Su(t)=u(t)$.

定理 1.5 如果已知 $w(z)\in\mathscr{H}^*(K)$ 的实部在 $L: |t|=R$ 上的值 $u(t)=u_1(t)+u_2(t)$, 其中 $u_1(t)=\mathrm{Re}[CAw(t)]$, $u_2(t)=\mathrm{Re}[Aw(t)]$, 则这个混合型解析函数 $w(z)$ 在 $K: |z|<R$ 内除一个纯虚数外完全确定, 且它有表达式

$$w(z)=\frac{-1}{2\pi i}\int_L\frac{u_1(t)}{\bar t}\overline{\left(\frac{t+z}{t-z}\right)}\,\overline{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{u_2(t)}{t}\left(\frac{t+z}{t-z}\right)\mathrm{d}t\qquad(z\in K)\tag{2}$$

证明由性质 1.4 知 $Su(z)\in\mathscr{H}^*(K)$ 且 $\mathrm{Re}[Su(t)]=\mathrm{Re}\,w(t)=u(t)=u_1(t)+u_2(t)\ (t\in L)$, 令 $H(z)=w(z)-Su(z)$, 显然 $H(z)\in\mathscr{H}^*(K)$, 即 $H(z)=CAH(z)+AH(z)$, 而 $H(z)=[CAw(z)+Aw(z)]-[CA(Su(z))+A(Su(z))]=[CAw(z)-CA(Su(z))]+[Aw(z)-A(Su(z))]$.

由 $\mathscr{H}^*(K)$ 中元素的表达式唯一得:

$$CAH(z)=CAw(z)-CA(Su(z)),\ AH(z)=Aw(z)-A(Su(z)),$$

从而 $$\mathrm{Re}[CAH(t)]=\mathrm{Re}[CAw(t)]-\mathrm{Re}[CA(Su(t))]=u_1(t)-u_1(t)=0,$$

$$\mathrm{Re}[AH(t)]=\mathrm{Re}[Aw(t)]-\mathrm{Re}[A(Su(t))]=u_2(t)-u_2(t)=0,$$

由调和函数的极值原理[4] 及(共轭)解析函数的性质得: $\forall z\in K$, $CAH(z)=iC_1$, $AH(z)=iC_2$,

(其中 C_1, C_2 为实常数) 于是, $H(z) = CAH(z) + AH(z) = iC$, 其中 $C \triangleq C_1 + C_2$,

即 $w(z) = Su(z) + iC$.

特别除一个纯虚数外有 $w(z) = Su(z) \quad (\forall z \in K)$.

2 Schwarz 边值问题的提出

设 $\overline{K}$: $|z| \leqslant R$, 在 $\mathscr{H}$ 类中求一个混合型解析函数 $w(z) \in \mathscr{H}(K)$, 使它在边界 L: $|t| = R$ 上连续且满足条件:

$$\text{问题 A:} \begin{cases} \mathrm{Re}\,w(t) = 0; \\ \mathrm{Re}F(t) = g(t). \end{cases} \quad t \in L. \tag{3}$$

$$\text{问题 B:} \begin{cases} \mathrm{Re}\,w(t) = g_1(t); \\ \mathrm{Re}F(t) = g_2(t). \end{cases} \quad t \in L. \tag{4}$$

其中 $F(z) = CAw(z)$, $g(t)$, $g_1(t)$, $g_2(t)$ 是在 L 上给定的连续(实) 函数.

定理 2.1 问题 A: $\begin{cases} \mathrm{Re}\,w(t) = 0; \\ \mathrm{Re}F(t) = g(t). \end{cases}$ 在除去一个纯虚数的条件下有唯一解:

$$w(z) = \frac{-1}{2\pi i}\int_L \frac{g(t)}{\bar{t}} \overline{\left(\frac{t+z}{t-z}\right)}\, \overline{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{-g(t)}{t}\left(\frac{t+z}{t-z}\right)\mathrm{d}t \qquad (\forall z \in K) \tag{5}$$

证 明 因 $w(z) \in \mathscr{H}(K)$, 则 $w(z) = F(z) + \Phi(z)$, 其中 $F(z)$, $\Phi(z)$ 分别是共轭解析和解析的函数.

$\forall t \in L$: $|t| = R$, $\mathrm{Re}\,w(t) = \mathrm{Re}F(t) + \mathrm{Re}\Phi(t) = 0$, $\mathrm{Re}\Phi(t) = -\mathrm{Re}F(t)$.

(1) 当 $g(t) = 0$ 时, $\mathrm{Re}\Phi(t) = -\mathrm{Re}F(t) = 0$, 由定理 1.5 得

$$w(z) = \frac{-1}{2\pi i}\int_L \frac{0}{\bar{t}} \overline{\left(\frac{t+z}{t-z}\right)}\, \overline{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{0}{t}\left(\frac{t+z}{t-z}\right)\mathrm{d}t = 0 + 0 \equiv 0 \qquad (\forall z \in K)$$

(2) 当 $g(t) \neq 0$ 时, $\mathrm{Re}\Phi(t) = -\mathrm{Re}F(t) = -g(t)$, 由定理 1.5 得

$$w(z) = \frac{-1}{2\pi i}\int_L g(t) \overline{\left(\frac{t+z}{t-z}\right)}\, \frac{\overline{\mathrm{d}t}}{\bar{t}} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{-g(t)}{t}\left(\frac{t+z}{t-z}\right)\mathrm{d}t \qquad (\forall z \in K)$$

(3) 唯一性 设问题 A 有两个解 $w_1(z) = F_1(z) + \Phi_1(z)$, $w_2(z) = F_2(z) + \Phi_2(z)$, 其中 F_i, Φ_i $(i = 1,2)$ 分别是共轭解析和解析的.

令 $w(z) = w_1(z) - w_2(z) = [F_1(z) - F_2(z)] + [\Phi_1(z) - \Phi_2(z)] \triangleq F(z) + \Phi(z)$,

则 $\mathrm{Re}\,w(t) = 0$ 且 $\mathrm{Re}F(t) = \mathrm{Re}F_1(t) - \mathrm{Re}F_2(t) = g(t) - g(t) = 0$.

由(1) 得 $w(z) \equiv 0$, 即 $w_1(z) \equiv w_2(z) \quad (\forall z \in K)$.

定理 2.2 问题 B: $\begin{cases} \mathrm{Re}\,w(t) = g_1(t); \\ \mathrm{Re}F(t) = g_2(t). \end{cases}$ 在除去一个纯虚数的条件下有唯一解:

$$w(z) = \frac{-1}{2\pi i}\int_L \frac{g_2(t)}{\bar{t}} \overline{\left(\frac{t+z}{t-z}\right)}\, \overline{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g_3(t)}{t}\left(\frac{t+z}{t-z}\right)\mathrm{d}t \qquad (\forall z \in K) \tag{6}$$

其中 $g_3(t) \triangleq g_1(t) - g_2(t)$.

证 明 因 $w(z) \in \mathscr{H}(K)$, $w(z) = F(z) + \Phi(z)$, 已知 $\mathrm{Re}\,w(t) = \mathrm{Re}[F(t)] + \mathrm{Re}[\Phi(t)] = g_1(t)$, 又 $\mathrm{Re}[F(t)] = g_2(t)$, 从而 $\mathrm{Re}[\Phi(t)] = g_1(t) - g_2(t) \triangleq g_3(t)$. 由定理 1.5, 问题 B 有解:

$$w(z) = \frac{-1}{2\pi i}\int_L g_2(t) \overline{\left(\frac{t+z}{t-z}\right)}\, \frac{\overline{\mathrm{d}t}}{\bar{t}} + \frac{1}{2\pi i}\int_L g_3(t)\left(\frac{t+z}{t-z}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t} \qquad (\forall z \in K)$$

设问题 B 有两个解 $w_1(z) = F_1 + \Phi_1$, $w_2(z) = F_2 + \Phi_2$, 其中 F_i, $\Phi_i(i = 1,2)$ 分别是共轭解析和解析的.

令 $w(z) = w_1(z) - w_2(z) = (F_1 - F_2) + (\Phi_1 - \Phi_2) \triangleq F(z) + \Phi(z)$,

$\mathrm{Re}[w(t)] = \mathrm{Re}[w_1(t)] - \mathrm{Re}[w_2(t)] = g_1(t) - g_1(t) = 0$, 且 $\mathrm{Re}[F(t)] = \mathrm{Re}[F_1(t)] -$

$\mathrm{Re}[F_2(t)] = g_2(t) - g_2(t) = 0$,

由定理 2.1 推证过程(1)得 $w(z) \equiv 0$, 即 $w_1(z) = w_2(z)$, 从而问题 B 的解唯一.

备注 1 由定理 2.1 中公式(5)知齐次边值问题 A 的解依赖于 w(z) 的共轭解析加项的实部在边界上的值, 当然也等价地依赖于 w(z) 的解析加项的实部在边界上的值.

备注 2 在定理 2.2 中, 当 $g_2(t) \equiv 0$ 时, $g_3(t) \equiv g_1(t)$, $w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g_1(t)}{t}\left(\frac{t+z}{t-z}\right)dt$ 为解析函数的 Schwarz 问题的解.

备注 3 类似于定理 2.2 的论证, 讨论等价的边值问题 $B'\begin{cases}\mathrm{Re}w(t) = g_1(t); \\ \mathrm{Re}\Phi(t) = g_2(t)\end{cases}$, 所得结论包含了共轭解析函数的 Schwarz 问题的解.

备注 4: 在公式(6)中求出其实部, 化简得 Poisson 积分

$$u(z) = \mathrm{Re}w(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t)\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2}d\theta. \quad (\text{其中 } u(t) = g_1(t)).$$

它为混合型解析函数的 Dirichlet 边值问题解.

例 2.3 在 $\mathscr{H}^+$ 类中求解边值问题 $\begin{cases}\mathrm{Re}w(t) = e^{\cos\theta}\cdot\cos\sin\theta; \\ \mathrm{Re}F(t) = \cos 2\theta.\end{cases}$ $t \in L$, 其中 $L: |t| = 1$, $0 \leqslant \theta = \arg t < 2\pi$.

解: 因 $|t| = 1$, $t = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, $(0 \leqslant \theta < 2\pi)$, $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{t^2+1}{2t}$,
$g_2(t) = \cos 2\theta = \frac{t^4+1}{2t^2}$, $g_1(t) = e^{\cos\theta}\cos\sin\theta$, $g_3(t) \triangleq g_1(t) - g_2(t) = e^{\cos\theta}\cos\sin\theta - \cos 2\theta$. 由定理 2.2

$$w(z) = \frac{-1}{2\pi i}\int_L \cos 2\theta\,\overline{\left(\frac{t+z}{t-z}\right)}\frac{\overline{dt}}{\bar{t}} + \frac{1}{2\pi i}\int_L (e^{\cos\theta}\cos\sin\theta - \cos 2\theta)\left(\frac{t+z}{t-z}\right)\frac{dt}{t},$$

$$F(z) \triangleq \frac{-1}{2\pi i}\int_L \cos 2\theta\,\overline{\left(\frac{t+z}{t-z}\right)}\frac{\overline{dt}}{\bar{t}} = \overline{\frac{1}{2\pi i}\int_L \cos 2\theta\left(\frac{t+z}{t-z}\right)\frac{dt}{t}} = \overline{\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{t^4+1}{2t^2}\left(\frac{t+z}{t-z}\right)\frac{dt}{t}} = \overline{z^2} = \bar{z}^2.$$

$$\Phi(z) \triangleq \frac{1}{2\pi i}\int_L (e^{\cos\theta}\cos\sin\theta - \cos 2\theta)\left(\frac{t+z}{t-z}\right)\frac{dt}{t} = \frac{1}{2\pi i}\int_L e^{\cos\theta}\cos\sin\theta\left(\frac{t+z}{t-z}\right)\frac{dt}{t} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \cos 2\theta\left(\frac{t+z}{t-z}\right)\frac{dt}{t}$$
$$= \Phi_1(z) - \Phi_2(z),$$

其中 $\Phi_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \cos 2\theta\left(\frac{t+z}{t-z}\right)\frac{dt}{t} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{t^4+1}{2t^2}\left(\frac{t+z}{t-z}\right)\frac{dt}{t} = z^2$,

$$\begin{aligned}\Phi_1(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_L e^{\cos\theta}\cos\sin\theta\left(\frac{t+z}{t-z}\right)\frac{dt}{t} \\ &= \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{e^{\cos\theta}\cos\sin\theta}{t-z}dt - \frac{1}{2\pi i}\int_L e^{\cos\theta}\cos\sin\theta\frac{dt}{t} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{\cos\theta}(\cos\sin\theta + i\sin\sin\theta)}{t-z}dt + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{\cos\theta}(\cos\sin\theta - i\sin\sin\theta)}{t-z}dt - \\ &\quad \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{\cos\theta}\cos\sin\theta}{t}dt \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^t}{t-z}dt + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{\bar{t}}}{t-z}dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos\sin\theta d\theta,\end{aligned}$$

而 $\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^t}{t-z}dt = e^z$, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos\sin\theta d\theta = 1$, (取 $\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^t}{t-z}dt = 1$ 的实部),

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{\bar{t}}}{t-z}dt \xlongequal{t_1=\bar{t}} \frac{-1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{t_1}}{\bar{t}_1-z}\frac{dt_1}{t_1^2} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{t_1}}{t_1(1-zt_1)}dt_1$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_L (\frac{1}{t_1}+\frac{z}{1-zt_1})e^{t_1}dt_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{t_1}}{t_1}dt_1 + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{t_1}}{1-zt_1}d(zt_1) = 1+0=1.$$

由此，$\Phi_1(z) = e^z + 1 - 1 = e^z$，$\Phi(z) = e^z - z^2$.

从而边值问题的解为 $w(z) = F(z) + \Phi(z) = \bar{z}^2 + e^z - z^2$.

参考文献：

[1] 张建元．一类复调和函数的 Riemann 边值问题[J]．宁夏大学学报(自然科学版)，1996，17(1)：70～71.

[2] 张建元．共轭解析函数的 Riemann 边值问题[J]．北京工业大学学报，1996，22(3)：99～106.

[3] 余加荣．复变函数[M]．北京：人民教育出版社，1979，193～1896.

[4] 钟玉泉．复变函数论[M]．第2版．北京：高等教育出版社，1997，359.

Schwarz's Boundary Value Problem for Mixed Type Analytic Functions

ZHANG Jian-yuan, ZHONG Rong-zhu

(Zhaotong Teachers' College, Zhaotong, Yunnan 657000, China)

Abstract In this paper the Schwarz type mixed integral is to be discussed within a set of mixed analytic functions. The solutions of Schwarz and Dirichlet boundary value problem can be obtained by Schwarz type mixed integral within $\mathscr{H}^+$. The results of other people in this field are included in this paper.

Key words: mixed type analytic functions; poisson type mixed integral; Schwarz type mixed integral; Schwarz boundary value problem; dirichleg boundary value problem

第 26 卷终

The End of Vol. 26