灰色系统中的灰元及灰元空间

陈世联
(昆明理工大学 理学院, 云南 昆明 650093)

摘要: 给出了灰色系统中灰数、灰元及灰元空间的公理化定义, 并讨论了它们的性质。最后, 从理论上证明了灰元白化的可实现问题。

关键词: 灰元; 灰数; 量化函数; 灰元空间

中图分类号: O29　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1007-855X(2001)02-092-04

1 灰数的概念及性质

定义1 一个在 R^n 上有界的不恒为零的映射 $f:R^n \to R_+$ 称为量化函数, 若 $\forall x,y\in R^n,\alpha\in[0,1]$, 有

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y)\geq \min\{f(x),f(y)\}$$

其中 R^n 为 n 维欧氏空间, $n\in N, R_+=\{x\mid x\in R, x\geq 0\}$.

记 $T^n=\{f\mid f:R^n\to R_+ 是量化函数\}$, 当 n=1 时, 量化函数就是文[1]中的典型白化函数.

设 $A_\alpha=\{x\mid x\in R^n, f(x)>\alpha\}$, 则有

定理1 映射 $f:R^n\to R_+$ 是量化函数当且仅当 A_α 是 R^n 的凸子集, $\forall\alpha\in[0,1]$.

证明 设 $f\in T^n$, $x,y\in A_\alpha$, 令 $x<z<y$, 取 $\alpha=\dfrac{|z-y|}{|x-y|}$, 则 $z=\alpha x+(1-\alpha)y$, 所以 $f(z)=f(\alpha x+(1-\alpha)y)\geq$ $\min\{f(x),f(y)\}>\alpha$, 故 $z\in A_\alpha$.

反之, $\forall x,y\in R^n$, 取 $\alpha\in[0,1]$, 使得 $f(x)\wedge f(y)>\alpha$. 若 $x<z<y$, 由于 $f(x)\wedge f(y)>\alpha$ 及 α 的任意性, 故有 $f(z)\geq\min\{f(x),f(y)\}$, 即 $f\in T^n$.

例 设

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\in[0,1)\\ 1 & x\in[1,2)\\ (x-3)^2 & x\in[2,3)\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

则 f 是量化函数.

定义2 设 $f\in T^n, x_0\in R^n$, 则称 $E_f=f^{-1}f(x_0)$ 为 x_0 的灰色区域; 称

$$\mu(x_0)=\frac{m(E_f)}{m(\mathrm{Supp}f)}$$

为 x_0 的灰色区域度, 其中 m 是 Lesbegue 测度, Supp$f$ 是 f 的支集.

性质1 $\forall x_0\in R^n$, 有 $0\leq\mu(x_0)\leq 1$.

收稿日期: 2000-12-01; **基金项目**: 云南省教育厅自然科学基金(项目编号: 20033).
作者简介: 陈世联(1964.3～), 男, 副教授; 主要研究方向: 决策分析, 灰色系统.

性质 2 若 f 是 1-1 映射，则 $\mu(x_0)=0, \forall x_0 \in R^n$.

证明 因为 $E_f = f^{-1}f(x_0)=\{x_0\}$，故 $m(E_f)=0$.

设 $f \in T^n$，记 $M_{(f)} = \vee\{f(x) \mid x \in \mathrm{Supp}\, f\}$.

定义 3 设 $f \in T^n, x_0 \in R^n$，称

$$\tau_{(f)} = \begin{cases} \dfrac{f(x_0)}{M_{(f)}}\mu_{(x_0)} & \mu_{(x_0)} \neq 0 \\ 1 & \mu_{(x_0)} = 0 \text{且} \dfrac{f(x_0)}{M_{(f)}} = 1 \\ 0 & \mu_{(x_0)} = 0 \text{且} \dfrac{f(x_0)}{M_{(f)}} \neq 1 \end{cases}$$

为 f 在 x_0 处的透明度.

性质 3 $\forall x_0 \in R^n$，有 $0 \le \tau_{(f)} \le 1$.

证明 因为 $0 \le \dfrac{f(x_0)}{M_{(f)}} \le 1$，而 $f^{-1}f(x_0) \subset \mathrm{Supp} f$.

性质 4 设 $f \in T^n$ 在 x_0 的灰色区域 E_f 上取最大值，且 E_f 是零测集，则在 E_f 的每一个点上有 $\tau_{(f)}=1$.

证明 此时 $\dfrac{f(x_0)}{M_{(f)}}=1, x_0 \in E_f$，而 $m(E_f)=0$，故 $\mu(x_0)=0$.

此性质说明，若量化函数在离散集上达到最大值，则函数在这些点上是透明的.

定义 4 $\beta_{(f)} = 1-\tau_{(f)}$ 称为 f 在 x_0 的灰度.

性质 5 $\forall f \in T^n, x_0 \in R^n$，有 $0 \le \beta_{(f)} \le 1$.

定理 2 设 $\{f_i\}: R^n \to R_+$ 是连续单调的量化函数列，$i=1,2,\cdots$，而 $\{f_i\}$ 一致收敛于 f，则 f 是量化函数. 进而，若 $\{f_i\}$ 递增，则 $\tau_{(f_i)} \le \tau_{(f)}$.

证明 对不等式 $f_i(\alpha x+(1-\alpha)y) \ge \min\{f_{i(x)}, f_{i(y)}\}$ 两边令 $i \to \infty$，可得

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y) \ge \min\{f(x), f(y)\}$$

故 f 是量化函数.

若 $\{f_i\}$ 单增，则 $E_{(f_i)} \subset E_f$，从而 $m(E_{(f_i)}) \le m(E_f)$.

该定理说明，可以用量化函数列去逼近某一量化函数.

定义 5 设 $x_0 \in R^n, \tau_{(f)}$ 是量化函数 f 在 x_0 处的透明度，则称二元序组 $(x_0, \tau_{(f)})$ 为以 x_0 为中心的一维灰数.

2 灰元及灰元空间

定义 6 设 Ω 为所要考察的对象集，而 Ω 中的每个元素都与因素 $\langle t_1,t_2,\cdots,t_n\rangle$ 有关，则称 $(\Omega, \langle t_1,t_2,\cdots, t_n\rangle)$ 为基本空间. Ω 中的点记为 $t\langle t_1,t_2,\cdots,t_n\rangle$，即 Ω 中的点是 n 元函数.

约定：若 $t_i \in R$，则把基本空间中的点 $t\langle t_1,t_2,\cdots,t_n\rangle$ 与 n 维欧氏空间中的点 $(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ 等同看待，即两种点不加区别.

记 $U=\{(t_1,t_2,\cdots,t_n)|t\langle t_1,t_2,\cdots,t_n\rangle \in\Omega\}$.

定义 7 设 $U\subset W\subset R^n, f_i:W\to R_+$ 是量化函数，$i=1,2,\cdots,m.\tau_{(f_i)}$ 是 f_i 在 x_0 的透明度，则称 $(x_0,\tau_{(f_1)},\tau_{(f_2)},\cdots,\tau_{(f_m)})$ 为 $n\times m$ 维灰数或灰色点；称 $\tau_{(f_i)}$ 为该点的第 i 个方位的透明度，$x_0\in W$.

现在，我们在 Ω 上定义二元关系～，对于 $t\langle t_1,t_2,\cdots,t_n\rangle\in\Omega, t'\langle t_1',t_2',\cdots,t_n'\rangle\in\Omega, t\sim t'$ 当且仅当 $\tau_{(f_i)}=\tau_{(g_i)}$，$\tau_{(f_i)}$ 与 $\tau_{(g_i)}$ 分别为这两点在第 i 个方位的透明度.

显然，～是等价关系，用 $\bar{t}_0$ 表示 t_0 所属的等价类，其等价类之集记为 $\overline{\Omega}$.

定义 8 设 $(x_0,\tau_{(f_1)},\tau_{(f_2)},\cdots,\tau_{(f_m)})$ 为基本空间 Ω 上的 $n\times m$ 灰色点，则 $(\bar{x}_0,\tau_{(f_1)},\tau_{(f_2)},\cdots,\tau_{(f_m)})$ 为 $\overline{\Omega}$ 中的点，我们把它叫做基本空间上的灰色元. $\tau_{(f_i)}$ 仍称为该灰色元的第 i 个方位的透明度.

定义 9 称两个灰色元相同，若它们的各个方位的透明度分别相等.

注 灰色点与灰色元的差别，灰色元之间没有空间位置的差别，即与空间位置无关. 这说明我们不是从几何上去考察灰色元，而感兴趣的仅是反映灰色性态的透明度.

设 Ω 是半群，$(\Omega,t\langle t_1,t_1,\cdots,t_n,\rangle)$ 是基本空间. 对 $x_1,x_2,y_1,y_2\in\Omega$，我们假定若 $x_1\in\bar{x}_2, y_1\in\bar{y}_2$，则 $x_1\circ y_1\in\overline{x_2\circ y_2}$. 于是我们可以在 $\overline{\Omega}$ 上定义二元运算 $*$ 为

$$\bar{x}*\bar{y}=\overline{x\circ y},\ x,y\in\Omega$$

若基本空间 $(\Omega,t\langle t_1,t_2,\cdots,t_n\rangle)$ 对两种运算 + 和 · 封闭，我们分别称为加法和乘法. 当 $x,y\in\Omega$ 时，用 $\tau_{(f_i)}(x+y)$ 表示点 $x+y$ 在第 i 个方位的透明度. 则当 $y_1=y_2$ 时，$\tau_{(f_i)}(x+y_1)=\tau_{(f_i)}(x+y_2)$. 所以我们可以相应地在 $\overline{\Omega}$ 上定义灰元的加法和乘法.

定义 10 设 $(\bar{x},\tau_{(f_1)},\tau_{(f_2)},\cdots,\tau_{(f_m)})$ 与 $(\bar{y},\tau_{(g_1)},\tau_{(g_2)},\cdots,\tau_{(g_m)})$ 为灰元，则

定义两个灰元的加法为

$$\bar{x}+\bar{y}=(\overline{x\circ y},\tau_{(p_1)},\tau_{(p_2)},\cdots,\tau_{(p_m)})$$

其中 $\tau_{(p_i)}=\max\{\tau_{(f_i)},\tau_{(g_i)}\}$.

定义两个灰元的乘法为

$$\bar{x}\bullet\bar{y}=(\overline{x\circ y},\tau_{(q_1)},\tau_{(q_2)},\cdots,\tau_{(q_m)})$$

其中 $\tau_{(q_i)}=\min\{\tau_{(f_i)},\tau_{(g_i)}\}$.

定义 11 设 Ω 为基本空间，所有 $n+m$ 维的灰元所构成的集合 P 叫做以 $\overline{\Omega}$ 为底空间的灰元空间（简称灰元空间），若 P 中具有灰元的加法及乘法.

性质 6 设 P 为灰元空间，则

(1) $(\bar{x}+\bar{y})+\bar{z}=\bar{x}+(\bar{y}+\bar{z})$;

(2) $(\bar{x}\bullet\bar{y})\bullet\bar{z}=\bar{x}\bullet(\bar{y}\bullet\bar{z})$;

(3)　$\bar{z}\bullet(\bar{x}+\bar{y})=\bar{z}\bullet\bar{x}+\bar{z}\bullet\bar{y}$.

注　若 $k<m$，则把 $n\times k$ 维灰元看作是 $n\times m$ 维灰元，即把灰元 $(\bar{x}_0,\tau_{(f_1)},\tau_{(f_2)},\cdots,\tau_{(f_k)})$ 与灰元 $(\bar{x}_0,\tau_{(f_1)},\tau_{(f_2)},\cdots,\tau_{(f_k)},1,\cdots,1)$ 等同看待，也就是说认为它在第 $k+1,k+2,\cdots,m$ 的透明度为 1.

定义 12　设 $\bar{x},\bar{y}$ 为灰元空间 P 中的灰元，我们说灰元 $(\bar{x},\tau_{(f_1)},\tau_{(f_2)},\cdots,\tau_{(f_m)})$ 优于灰元 $(\bar{y},\tau_{(g_1)},\tau_{(g_2)},\cdots,\tau_{(g_m)})$, 若 $\tau_{(f_i)}\ge\tau_{(g_i)}$，$i=1,2,\cdots,m$.

显然，优于关系是偏序关系.

设 P 为灰元空间，则把 P 的有序子集的上确界(若存在)叫做白化元；P 的最大元叫做最佳白化元；各个方位的透明度均为 1 的灰元叫做完全白化元.

灰色系统理论的一个基本问题是如何把灰数白化的问题，实质上是如何从灰元空间中找出最大元(若存在)的问题.

定理 3　设 Ω 是有限集，P 是以 $\overline{\Omega}$ 为底空间的灰元空间，则 P 中一定存在最佳白化元.

证明　在空间 P 中，所有的元素关于优于关系给出的偏序构成格，如果规定任意二元以它们的和为上界，积为下界，则 (P,V,Λ) 是完备格，从而有最大元.

定理 4　设 Ω 为任意集合，则以 $\overline{\Omega}$ 为底空间的灰元空间 P 中一定存在最佳白化元.

证明　因为对每个灰元 $(\bar{x},\tau_{(f_1)},\tau_{(f_2)},\cdots,\tau_{(f_m)})\in P$, 有 $\left|\tau_{(f_i)}\right|\le 1$，所以，$P$ 的任意有序子集有上确界. 从而，由 Zorn 引理知，P 有最大元，即最佳白化元.

定理 3 是利用格结构得出有限集中灰元可白化问题，而定理 4 虽然是对任意集合成立，但是，涉及集合公理系统. 总而言之，有理由认为灰元白化问题是可实现的.

参考文献:

[1]　邓聚龙. 灰色系统理论的生成函数[J]. 模糊数学, 1985, (2): 18～21.

[2]　刘思峰, 郭天榜. 灰色系统理论及其应用[M]. 开封: 河南大学出版社. 1991. 7～14.

[3]　陈世联, 等. 绝对关联度及其应用[J]. 系统工程理论与实践, 1998, 18(6): 109～111.

[4]　陈世联. 灰色系统的几个理论问题[J]. 系统工程, 1997, 15(1): 20～23.

[5]　陈世联. "软硬兼设" 系统的 Topsis 综合评价方法[J]. 农业系统科学与综合研究. 1999, 15(2): 108～110.

[6]　陈世联. 基于绝对关联度的优势分析[J]. 农业系统科学与综合研究. 1999, 15(4): 260～261.

[7]　CHEN Shi-lian. A Method of Synthetical Appraisal on "Have Both Soft and Hard" Systems[J]. Journal of Systems Science and Systems Engineering. 1999, 8(4): 439～444.

The Grey Element and Grey Element Space in Grey Systems

CHEN Shi-lian

(The Faculty of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, China)

Abstract: The concepts of grey number, grey element and grey element space are discribed in grey systems. Its properties are discussed. The whitening treatment of grey element can realize, this problem is proved.

Key words: grey number; grey element; measured function; grey element space