

doi 10.3969/j.issn.1007-855x.2010.02.009

瑞利波作用下半空间饱和土中位移应力分布特性研究

刘林超, 闫启方, 刘磊

(信阳师范学院 土木工程学院, 河南 信阳 464000)

摘要: 研究了瑞利波作用下半空间饱和土位移和应力的分布特征, 对于建筑结构抗震设计具有重要的意义. 基于饱和多孔介质理论, 将土体视为液固饱和两相介质, 利用 Helmholtz 分解, 建立求解了瑞利波作用下饱和土的弥散方程, 得到了半空间饱和土的位移和应力. 分析了渗透系数和阻尼系数对瑞利波作用下半空间饱和土中位移和应力分布特征的影响.

关键词: 多孔介质; 饱和土; 瑞利波; 粘滞阻尼系数; Helmholtz 分解

中图分类号: TU 573.12 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-855X(2010)02-0042-05

Distribution Characteristics of Displacement and Stress in Half-Space of Saturated Soil under Rayleigh Waves

LU Lin-chaq YAN Qi-fang LIU Lei

(School of Civil Engineering Xinyang Normal University Xinyang Henan 464000 China)

Abstract It is of great significance to study the distribution characteristics of displacement and stress in half space of saturated soil under Rayleigh waves for seismic design of buildings. Based on porous medium theory, the soil is taken in this paper as fluid two-phase medium. Helmholtz decomposition is then adopted to establish the dispersion equation of soil and to get the displacement and stress. The influences of permeability coefficient and damping coefficient are finally analyzed.

Key words porous medium; saturated soil; Rayleigh waves; viscous damping coefficient; Helmholtz decomposition

0 引言

众所周知, 土体是由固、液、气三相组成的多孔介质, 当假设土骨架间的孔隙全部被液体充满时, 则土体就是理论上的理想饱和两相介质. 以往关于饱和土中瑞利波的研究大多是基于 Biot 饱和土理论, 尽管 Biot 理论已成功应用于诸多工程领域中, 但研究表明其理论模型存在一定的缺陷^[1]. 这是由于 Biot 理论对力学行为的描述是建立在直观基础上的, 从本质上讲, 它是一个工程描述的方法. 更加合理的理论是基于连续介质混合物公理和体积分数概念的多孔介质理论, 利用体积分数的概念, 若干的微观性质可以直接通过宏观性质来描述, 并且避免了杂交混合物理论中的繁杂公式. 同时, 在不需要额外的假定下, 诸如动力、材料和几何非线性等一些效应可以很容易地反映在其数学模型中. 正因为如此, 基于多孔介质理论的波的传播特性的研究开始受到关注. 基于多孔介质理论, de Boer 等^[2]利用 Laplace 变换给出了一维流体饱和不可压多孔介质动力响应的一般解析解. de Boer 和 Liu^[3]证明了对于不可压流体饱和弹性多孔介质, 仅存在一个耦合的纵波和一个耦合的横波. 刘占芳等^[4]研究了非均匀平面波的动力行为, 指出 Rayleigh 波和

收稿日期: 2009-06-09. 基金项目: 上海市重点学科建设项目 (项目编号: Y0103) 资助; 上海市自然科学基金项目 (项目编号: 06ZR14037).

第一作者简介: 刘林超 (1979-), 男, 讲师, 博士. 主要研究方向: 多孔介质理论、粘弹性理论、岩土力学等.

E-mail: lk109@shu.edu.cn

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. <http://www.cnki.net>

Love 波的频率方程是一个与波数有关的复数方程. 杨晓等^[5]研究了流体饱和和不可压黏弹性多孔介质中的非均匀平面波及其能量流和能量耗散规律. 张燕等^[6]研究了不可压液体饱和粘弹性多孔半空间中的 Rayleigh 波. 郑云英等^[7]研究了流体饱和和不可压标准线性粘弹性多孔介质中平面波的传播和反射问题. 本文将利用多孔介质理论来描述饱和土的宏观力学行为, 研究瑞利波作用下半空间饱和土的应力和位移分布的特征.

1 饱和土中瑞利波的弥散方程

将土体视为液固两相饱和和多孔介质, 并利用多孔介质理论来描述其力学行为, 其控制方程为^[8,9]:

$$\begin{cases} (\lambda^S + \mu^S) \text{grad div } \mathbf{u}^S + \mu^S \text{div grad } \mathbf{u}^S - \text{grad } p - \rho^S \ddot{\mathbf{u}}^S - \rho^L \ddot{\mathbf{u}}^L = 0 \\ -n^L \text{grad } p - \rho^L \ddot{\mathbf{u}}^L - S_v (\dot{\mathbf{u}}^L - \dot{\mathbf{u}}^S) = 0 \\ \text{div}(n^S \dot{\mathbf{u}}^S + n^L \dot{\mathbf{u}}^L) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

这里, n^L 和 n^S 为饱和土流相和固相的体积分数, 且满足 $n^S + n^L = 1$, $\mu^S = n^S G(1 + 2i\beta)$, $\lambda^S = \frac{2\nu}{1 - 2\nu} \mu^S$ 为土体固相的表观拉梅常数, G 为土骨架的剪切模量, β 为粘滞阻尼系数, ν 为泊松比, ρ^S 为表观密度, ρ^L 为水的表观密度. \mathbf{u}^S 为土骨架位移矢量, \mathbf{u}^L 为流相位移矢量, p 为孔隙水压力, $S_v = \frac{(n^F)^2 \gamma^{FR}}{k^L}$ 为表征流 - 固两相相互作用的系数, γ^{FR} 是流相的容重, k^F 是 Darcy 渗流系数.

为了求解控制方程 (1), 我们采用 Helmholtz 分解的方法. 设固相骨架和孔隙流体的标量势和矢量势分别为 $\Phi(x, t)$, $\Psi(x, t)$, $H(x, t)$, $G(x, t)$, 即:

$$\mathbf{u}^S = \text{grad } \Phi + \text{curl } H, \quad \mathbf{u}^L = \text{grad } \Psi + \text{curl } G \quad (2)$$

借助于势函数 $\Phi(x, t)$, $\Psi(x, t)$, $H(x, t)$, $G(x, t)$, 可以将控制方程 (1) 解耦为:

$$\begin{cases} (\lambda^S + 2\mu^S) \nabla^2 \Phi - n^S p - \rho^S \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + S_v \frac{\partial}{\partial t} (\Psi - \Phi) = 0 \\ n^L p + \rho^L \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + S_v \frac{\partial}{\partial t} (\Psi - \Phi) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (n^S \nabla^2 \Phi + n^L \nabla^2 \Psi) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

和

$$\begin{cases} \mu^S \nabla^2 H - \rho^S \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + S_v \frac{\partial}{\partial t} (G - H) = 0 \\ \rho^L \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + S_v \frac{\partial}{\partial t} (G - H) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

这里, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 为 Laplace 算子.

令 $\Phi(x, t)$, $\Psi(x, t)$, $H(x, t)$, $G(x, t)$ 及孔隙水压力 p 为时间的谐调函数, 即设:

$$\Phi = \bar{\Phi}(x) e^{-i\omega t}, \quad \Psi = \bar{\Psi}(x) e^{-i\omega t}, \quad G = \bar{G}(x) e^{-i\omega t}, \quad H = \bar{H}(x) e^{-i\omega t}, \quad p = \bar{p}(x) e^{-i\omega t} \quad (5)$$

式 (5) 中 ω 为频率, i 为单位虚数. 设笛卡尔直角坐标系 oxy 平面位于半空间的表面上, 且 ox 轴指向介质, 将式 (5) 代入 (3) 式和 (4) 式, 求解方程可得:

$$\bar{\Phi}(x, z) = (A_1 e^{-\xi z} + A_2 e^{-\gamma z}) e^{i\gamma x} \quad (6)$$

$$\bar{\Psi}(x, z) = \left(-\frac{n^S}{n^L} A_1 e^{-\xi z} + \frac{n^L \rho^S \omega + S_v}{n^S \rho^L \omega + S_v} A_2 e^{-\gamma z} \right) e^{i\gamma x} \quad (7)$$

$$\bar{H}_y(x, z) = A_3 e^{-\eta z} e^{i\gamma x}, \quad \bar{H}_x = \bar{H}_z = 0 \quad (8)$$

$$\bar{G}_y(x, z) = \frac{S_v^2 + i\omega \omega_v \rho^L}{\rho^L \omega^2 + S_v^2} A_3 e^{-\eta z} e^{i\gamma x} \quad (9)$$

$$\bar{p}(x, z) = \left[-\frac{n^S \rho' \omega^2 + i\omega S_v}{n^{L^2}} A_1 e^{-\xi} + \frac{n^L \rho' \omega^3 + i\omega^2 S_v (\rho' + \rho)}{n^S \rho' \omega + iS_v} A_2 e^{-\gamma} \right] e^{i\gamma x}$$

这里, γ_r 为瑞利波的复波数, $\xi^2 = \gamma_r^2 - k_L^2$, $\eta^2 = \gamma_r^2 - k_T^2$, $\text{Re}(\xi) > 0$, $\text{Re}(\gamma_r) > 0$, $\text{Re}(\eta) > 0$, $k_L^2 = a_L + i b_L$, $k_T^2 = a_T + i b_T$, $a_T = \frac{\rho' \rho' \omega^4 + \rho' S_v^2 \omega^2 + \rho' S_v^2 \omega^2}{\mu^S (\rho'^2 \omega^2 + S_v^2)}$, $a_L = \frac{\rho' n^{L^2} + \rho' n^{S^2}}{(\lambda^S + 2\mu^S) n^{L^2}} \omega^2$, $b_T = \frac{\rho'^2 S_v \omega^3}{\mu^S (\rho'^2 \omega^2 + S_v^2)}$,

$$b_L = \frac{S_v \omega}{(\lambda^S + 2\mu^S) n^{L^2}}.$$

设饱和半空间质表面自由且有足够的渗透性, 相应的边界条件为:

$$\bar{T}_{zx}^s|_{z=0} = 0, \bar{T}_{zy}^s|_{z=0} = 0, \bar{T}_{zz}^s|_{z=0} = 0, \bar{p}|_{z=0} = 0 \quad (10)$$

由(10)式可得关于振幅 A_1 、 A_2 和 A_3 的代数方程组, 并知方程组的系数行列式等于零可得饱和半空间质表面自由且有足够的渗透性条件下的弥散方程为:

$$4\gamma_r^2 \eta \xi - \left[2\gamma_r^2 - \left(2 + \frac{\lambda^S}{\mu^S} \right) k_L^2 \right] (2\gamma_r^2 - k_T^2) + \frac{(n^S \rho' \omega + iS_v)^2}{[\rho' \rho' \omega^2 + i\omega S_v (\rho' + \rho)] n^{L^2}} [4\gamma_r^3 \eta - 2\gamma_r^2 (2\gamma_r^2 - k_T^2)] = 0 \quad (11)$$

利用数值方法求解方程(11)可以得到复波数 γ_r . 对于饱和半空间表面自由且不透水的边界情况可以通过相同的方法得到其弥散方程, 这里就不再叙述.

2 瑞利波作用下饱和半空间位移和应力

通过方程(11)确定的复波数 γ_r , 我们可以求解瑞利波作用下饱和半空间的位移和应力. 为此, 由式(2)知:

$$\bar{u}^s = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial z}, \bar{v}^s = 0, \bar{w}^s = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial x} \quad (12)$$

由边界条件(10)可得

$$A_3 = -\frac{\frac{\lambda^S}{\mu^S} (\xi^2 - \gamma_r^2) + 2\xi^2 - 2\gamma_r \xi}{i(\eta - \gamma_r)^2} = \varepsilon_1 A_1 \quad (13)$$

$$A_2 = -\frac{[\frac{\lambda^S}{\mu^S} (\xi^2 - \gamma_r^2) + 2\xi^2] (\eta^2 + \gamma_r^2) - 4\gamma_r^2 \xi \eta}{2\gamma_r^2 (\eta - \gamma_r)^2} = \varepsilon_2 A_1 \quad (14)$$

由此可得瑞利波作下的水平位移和竖直位移的表达式为:

$$\begin{aligned} \bar{u}^s(x, z) &= (i\gamma_r A_1 e^{-\xi} + i\gamma_r A_2 e^{-\gamma_r z} + \eta A_3 e^{-\eta z}) e^{i\gamma_r x} \\ &= A_1 (u_1 e^{-\xi} + u_2 e^{-\gamma_r z} + u_3 e^{-\eta z}) e^{i\gamma_r x} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \bar{w}^s(x, z) &= (-\xi A_1 e^{-\xi} - \gamma_r A_2 e^{-\gamma_r z} + i\gamma_r A_3 e^{-\eta z}) e^{i\gamma_r x} \\ &= A_1 (w_1 e^{-\xi} + w_2 e^{-\gamma_r z} + w_3 e^{-\eta z}) e^{i\gamma_r x} \end{aligned} \quad (16)$$

式中, $u_1 = i\gamma_r$, $u_2 = -i\gamma_r \varepsilon_2$, $u_3 = -\eta \varepsilon_1$, $w_1 = -\xi$, $w_2 = -\gamma_r \varepsilon_2$, $w_3 = i\gamma_r \varepsilon_1$. 再由式(15)、(16)可以得到应力的表达式为:

$$\begin{aligned} \bar{T}_{zx}^s &= \mu^S A_1 [-2i\gamma_r \xi e^{-\xi} - 2i\gamma_r^2 \varepsilon_2 e^{-\gamma_r z} - (\eta^2 + \gamma_r^2) \varepsilon_1 e^{-\eta z}] e^{i\gamma_r x} \\ &= \mu^S A_1 (\tau_1 e^{-\xi} + \tau_2 e^{-\gamma_r z} + \tau_3 e^{-\eta z}) e^{i\gamma_r x} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_{zz}^s &= \mu^S A_1 \left\{ [\frac{\lambda^S}{\mu^S} (\xi^2 - \gamma_r^2) + 2\xi^2] e^{-\xi} e^{i\gamma_r x} + 2\gamma_r^2 \varepsilon_2 e^{-\gamma_r z} - 2i\gamma_r \eta \varepsilon_1 e^{-\eta z} \right\} e^{i\gamma_r x} \\ &= \mu^S A_1 (\theta_1 e^{-\xi} + \theta_2 e^{-\gamma_r z} + \theta_3 e^{-\eta z}) e^{i\gamma_r x} \end{aligned} \quad (18)$$

其中, $\tau_1 = -2i\gamma_r$, $\tau_2 = -2i\gamma_r^2 \varepsilon_2$, $\tau_3 = -(\eta^2 + \gamma_r^2) \varepsilon_1$, $\theta_1 = \frac{\lambda^S}{\mu^S} (\xi^2 - \gamma_r^2) + 2\xi^2$, $\theta_2 = 2\gamma_r^2 \varepsilon_2$, $\theta_3 = -$

$2i\gamma_r \eta \varepsilon_1$.

3 瑞利波作用下饱和半空间位移和应力分布特征

我们来分析饱和土半空间表面自由且有足够的渗透性边界情况下位移和应力的变化, 重点考虑渗透系数和阻尼系数对位移幅值和应力幅值的影响, 为了便于比较, 我们考察 $\frac{u^s(z)}{u^s(0)}$ 、 $\frac{w^s(z)}{w^s(0)}$ 、 $\frac{T_x^s(z)}{\mu^s T_x^s(0)}$ 和 $\frac{T_z^s(z)}{\mu^s T_z^s(0)}$ 随 z 深度的变化情况. 各参量的取值分别为 $\omega = 30\text{Hz}$, $n^s = 0.67$, $nL^s = 0.33$, $\rho^s = 1700\text{kg/m}^3$, $\rho^s = 1000\text{kg/m}^3$, $\nu = 0.35$, $G = 8.5 \times 10^7\text{Pa}$, $\gamma^R = 1 \times 10^4\text{kg/m}^3$. 图 1~图 8 为渗透系数和粘滞阻尼系数对水平位移、竖直位移幅值和水平应力、竖直应力的影响曲线. 可以看出, 由于瑞利波主要作用在半空间的表面, 随着深度的增加瑞利波产生的位移和应力很快地衰减为零. 应力幅值的衰减速度要比位移幅值的衰减速度快. 从图 1~图 2 可以看出渗透系数越大, 同一深度处的水平和竖直位移幅值要大, 但在地表附近渗透系数对水平位移和竖直位移的影响不明显. 水平位移幅值随深度变化时在表面附近存在一个峰值. 从图 3~图 4 可以看出粘滞阻尼系数对位移的影响, 粘滞阻尼系数越大, 相应的位移幅值越小, 粘滞阻尼系数在地表附近对位移的影响也不明显.

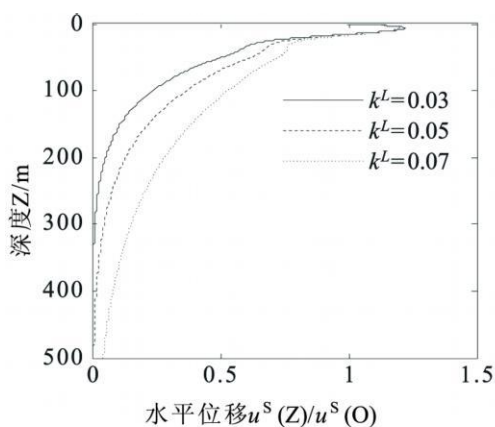


图1 渗透系数对水平位移幅值的影响
Fig.1 Influence of the permeability coefficient on the amplitude horizontal displacement

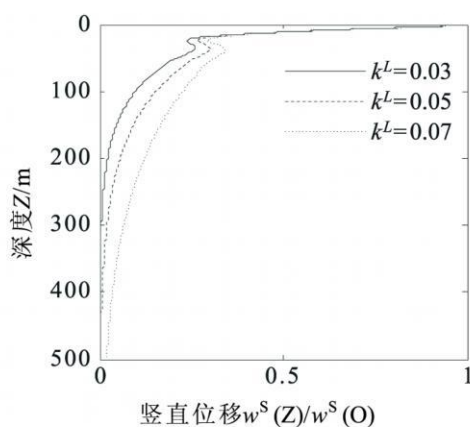


图2 渗透系数对竖直位移幅值的影响
Fig.2 Influence of the permeability coefficient on the amplitude vertical displacement

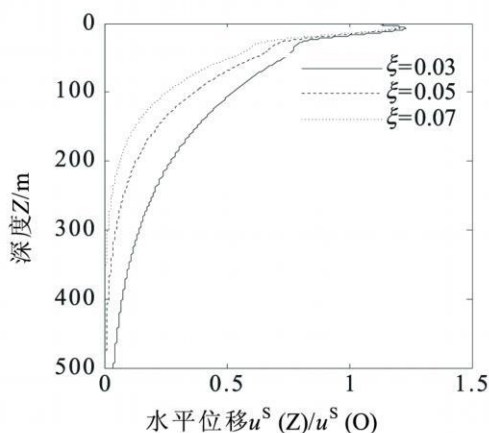


图3 粘滞阻尼系数对水平位移幅值的影响
Fig.3 Influence of the viscous damping coefficient on the amplitude horizontal displacement

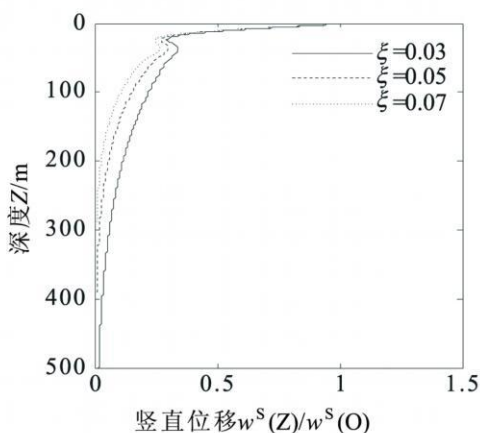


图4 粘滞阻尼系数对竖直位移幅值的影响
Fig.4 Influence of the viscous damping coefficient on the amplitude vertical displacement

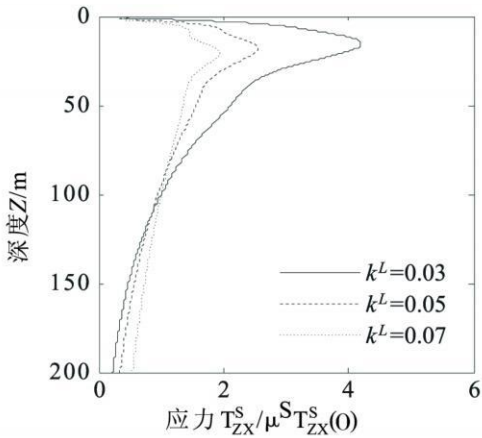


图5 渗透系数对水平应力幅值的影响

Fig.5 Influence of the permeability coefficient on the amplitude horizontal stress

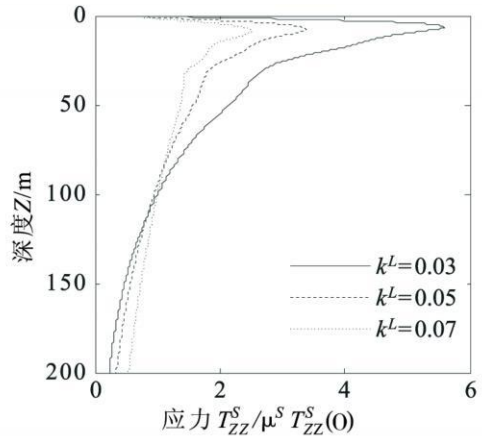


图6 渗透系数对竖直应力幅值的影响

Fig.6 Influence of the permeability coefficient on the amplitude vertical stress

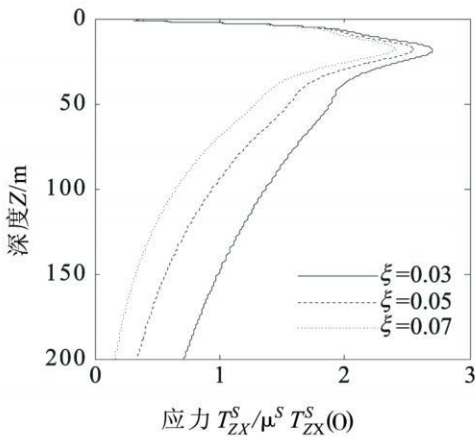


图7 粘滞阻尼系数对水平应力幅值的影响

Fig.7 Influence of the viscous damping coefficient on the amplitude horizontal stress

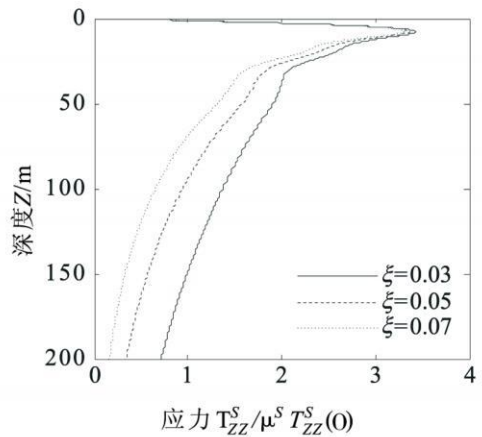


图8 粘滞阻尼系数对竖直应力幅值的影响

Fig.8 Influence of the viscous damping coefficient on the amplitude vertical stress

图 5~ 图 6 是渗透系数对水平应力幅值和竖直应力幅值的影响曲线. 在离地表面一定深度范围内, 渗透系数越大, 应力幅值越小, 且应力随深度的变化曲线存在一个幅值. 当深度超过了这个范围, 应力幅值随深度的变化刚好相反, 即渗透系数越大, 应力越大. 图 7~ 图 8 为粘滞阻尼系数对应力的影响情况. 可以看出, 粘滞阻尼系数越大, 相应的应力幅值越小, 而且在离地表面附近应力幅值随深度的变化曲线同样存在一个峰值.

4 结束语

研究瑞利波作用下饱和半空间位移和应力的分布特征对于建筑结构抗震设计、减震隔震设计等有着重要的实际意义. 由于饱和土体是饱和两相介质, 本文在饱和多孔介质理论的基础上, 利用 Helmholtz 分解的方法, 通过建立求解瑞利波弥散方程, 研究了瑞利波作用下饱和半空土中位移和应力. 分析发现: 随着深度的增加瑞利波产生的位移和应力很快地衰减为零, 地表附近渗透系数和粘滞阻尼系数对位移的影响不明显, 渗透系数对水平应力幅值和竖直应力幅值的影响与深度有关.

(下转第 90 页)

3 结 论

特征的可变性和其特征之间的约束依赖关系使产品线具有更大的灵活性,同时可导出产品线的多个不同应用软件产品.本文引入特征的变体度算法是一种度量产品线实例数量的方法,该方法不仅能度量特征分解条件下的特征变体度,而且也可以度量特征约束依赖条件下的变体度,并支持精确度量多型分解和多特征依赖

关系下的变体度,其结果对衡量产品线的复杂性提供了理论依据,为产品线的开发决策提供支持.

参考文献:

[1] Kwano Lee, Kyo C Kang, Jaepun Lee. Concepts and Guidelines of Feature Modeling for Product Line Software Engineering [C]. Proceedings of the 7th International Conference Software Reuse 2002: 62– 77.

[2] Michel Jaring, Jan Bosch. A Taxonomy and Hierarchy of Variability Dependencies in Software Product Family Engineering [C]. Proceedings of the 28th Annual International Computer Software and Applications Conference (COMPSAC' 04), 2004: 356– 361.

[3] Pierre-Yves Schobbens, Patrick Heymans, Jean-Christophe Trigaux. Feature Diagrams: A Survey and a Formal Semantics [C]. 14th IEEE International Requirements Engineering Conference (RE'06), 2006: 136– 145.

[4] Thomas von derMöhlen, Horst Lichter. Determining the Variation Degree of Feature Models [C]. 9th International Conference SPLC 2005. Proceedings 2005: 82– 88.

[5] 罗代忠, 赵文耘. 一种面向产品线的特征依赖建模方法 [J]. 计算机应用, 2008, 28(9): 2349– 2352.

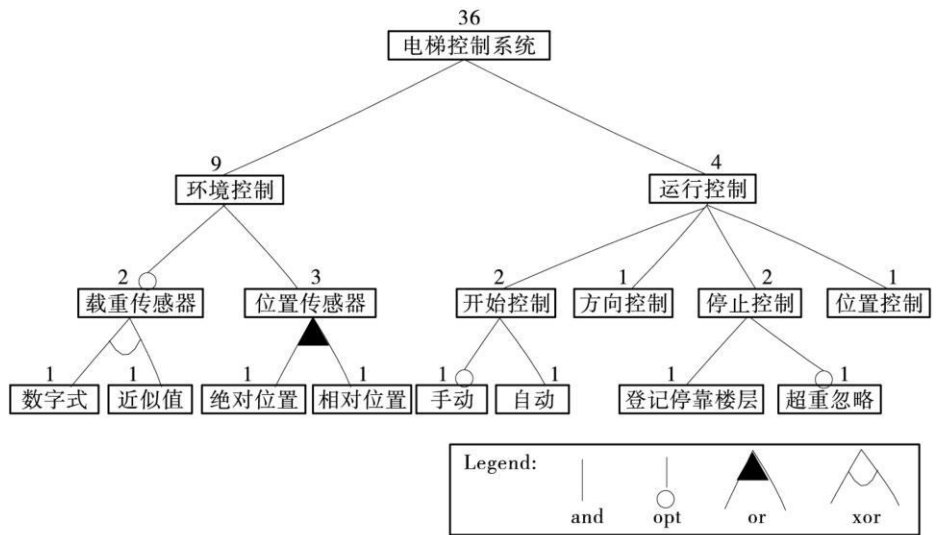


图1 电梯控制系统产品线的特征模型
Fig.1 Feature model of product line for elevator controlling system

(上接第 46 页)

参考文献:

[1] Edehan I, Wilhelmanski K. Asymptotic analysis of surface waves at vacuum/porous medium and liquid/porous medium interfaces [J]. Continuum Mech Thermodyn 2002, 14: 25– 44.

[2] de Boer R, Ehlers W, Liu Z. One-dimensional transient wave propagation in fluid-saturated incompressible porous media [J]. Archive Appl Mech 1993, 63: 59– 72.

[3] de Boer R, Liu Z. Plane waves in a semi-infinite fluid saturated porous media [J]. Transport in Porous Media 1994, 16: 147– 173.

[4] 刘占芳, 李德源, 严波. 饱和多孔介质中的非均匀平面波 [J]. 岩土力学报, 1999, 20(4): 31– 35.

[5] 杨晓, 车京兰. 饱和黏弹性多孔介质中的平面波及能量耗散 [J]. 力学学报, 2005, 37(5): 579– 585.

[6] 张燕, 杨晓. 不可压饱和粘弹性多孔介质中的 Rayleigh 波 [J]. 上海大学学报: 自然科学版, 2007, 13(1): 62– 67.

[7] 郑云英, 杨晓. 流体饱和标准线性粘弹性多孔介质中的平面波 [J]. 波固体力学报, 2005, 26(2): 203– 206.

[8] de Boer R. Theory of porous media: highlights in the historical development and current state [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2000.

[9] LIU Z F, de Boer R. Dispersion and attenuation of surface waves in a fluid-saturated porous media [J]. Transport in Porous Media 1997, 29: 207– 223.