第 33卷 第 4期　　昆明理工大学学报（理工版）　　Vol. 33　No. 4
2008年 8月　　Journal of Kunming University of Science and Technology (Science and Technology)　　Aug. 2008

由 n次幂等矩阵确定的 Grothendieck群

周　航, 樊旭辉
(武警工程学院 基础部, 陕西 西安 710086)

摘要: 设 R是含幺结合环, $n\geq 2$为自然数. 给出了 n次幂等矩阵集 $P_k^n(R)=\{P\mid P^n=P\in M_k(R)\}$上的一个等价关系, 并利用 n次幂等矩阵的等价类得到了相关的 Grothendieck群.

关键词: 幂等矩阵; 代数等价; Grothendieck群
中图分类号: O154.3　文献标识码: A　文章编号: 1007-855X(2008)04-0123-02

Grothendieck Group from n-Potent Matrices

ZHOU Hang, FAN Xu-hui
(Foundation Department, Engineering College of Armed Police Force, Xi'an 710086, China)

Abstract: Let R be an associative ring, $n\geq 2$ be a natural number. In this paper, an equivalence relation on $P_k^n(R)=\{P\mid P^n=P\in M_k(R)\}$ for all $k\geq 1$ is defined and a Grothendieck group using the defined equivalence classes is constructed.

Key words: idempotent matrix; algebraic equivalence; Grothendieck group

0 引 言

定义 1　设 R是含幺结合环, $n\geq 2$为自然数, 若

$$P^n=P\in M_k(R),\ k\geq 1$$

则称 P为 $M_k(R)$中的 n次幂等矩阵. 令 $P_k^n(R)=\{P\mid P^n=P\in M_k(R)\}$.

引理[1]　(交换半群完备化定理) 设 S是交换(加法)半群, 则有 Abel群 G(称为 S的 Grothendieck群, 记作 $G(S)$)与半群同态 $\varphi: S\to G$(具有泛性质).

对任意的含幺结合环 R, 代数 K-理论给出了一系列 Abel群 $K_i(R)$, $i=0,1,2,\cdots$(见文[2]). 作为环的不变量, 它们是刻画环结构的有力工具. 幂等矩阵及 Grothendieck群与 K_0群密切相关, 因此研究不同环上的幂等矩阵及 Grothendieck群便成为代数 K-理论的重要课题之一. 不少学者对此做了深入的研究, 得到了一些重要的结果(如文[3~6]). 本文定义了 n次幂等矩阵集 $P_k^n(R)$上的一个等价关系, 由 n次幂等矩阵的等价类得到了相关的 Grothendieck群.

1 主要结果

定义 2　设 $P,Q\in P_k^n(R)$, 若存在 $X,Y\in M_k(R)$, 使得

$$P=XY,\ Q=YX,$$

则称 P与 Q代数等价, 记作 $P\sim_a Q$.

定理 1　$\sim_a$是 $P_k^n(R)$上的等价关系.

证明　显然 $\sim_a$具有反身性、对称性. 下证 $\sim_a$具有传递性.

设 $P,Q,W\in P_k^n(R)$, 且 $P\sim_a Q$, $Q\sim_a W$. 故存在 $X,Y,S,T\in M_k(R)$, 使得

$$P=XY,\ Q=YX=ST,\ W=TS.$$

令 $U=XQ^{n-2}S$, $V=TY$则有

收稿日期: 2008-03-18 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(项目编号: 10671202).
第一作者简介: 周航(1975-), 男, 硕士, 讲师. 主要研究方向: 代数 K-理论. **E-mail**: zhouhang2006@sohu.com

$$UV = XQ^{n-2}STY = XQ^{n-1}Y = X(YX)^{n-1}Y = (XY)^n = P^n = P$$
$$VU = TYXQ^{n-2}S = TQ^{n-1}S = T(ST)^{n-1}S = (TS)^n = W^n = W$$

因此 $P \sim_a W$.

定理 2 设 $P \in P_k^n(R)$, $Q \in P_l^n(R)$, 则在 $P_{k+l}^n(R)$ 中 $(R)\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \sim_a \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$.

证明 由 $P \in P_k^n(R)$, $Q \in P_l^n(R)$ 知, $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \in P_{k+1}^n(R)$.

令 $X = \begin{pmatrix} 0 & P \\ Q & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & Q^{n-1} \\ P^{n-1} & 0 \end{pmatrix}$, 则 $X, Y \in {}_{k+l}(R)$, 且

$$XY = \begin{pmatrix} 0 & P \\ Q & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & Q^{n-1} \\ P^{n-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^n & 0 \\ 0 & Q^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$
$$YX = \begin{pmatrix} 0 & Q^{n-1} \\ P^{n-1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & P \\ Q & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^n & 0 \\ 0 & P^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$$

对任意的自然数 $k \geq 1$, 定义映射 i_k 如下:

$$i_k: M_k(R) \to M_{k+1}(R), X \to \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则 i_k 是 $M_k(R)$ 到 $M_{k+1}(R)$ 的包含映射, 且 i_k 限制在 $P_k^n(R)$ 上是 $P_k^n(R)$ 到 $P_{k+1}^n(R)$ 的包含映射.

令 $M(R) = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k(R)$, $P^n(R) = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k^n(R)$, 在 $P^n(R)$ 中定义双线性关系 $\oplus$ 如下: 对任意的 $P, Q \in P_n(R)$, 存在最小的自然数 k, l, 使得 $P \in P_k^n(R)$, $Q \in P_l^n(R)$, 令

$$P \oplus Q = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

显然 $P \oplus Q \in P_{k+l}^n(R) \subset P^n(R)$.

定义 3 设 R 是环, $n \geq 2$ 为自然数, $P, Q \in P^n(R)$, 则存在足够大的自然数 k, 使得 $P, Q \in P_k^n(R)$, 如果在 $P_k^n(R)$ 中 $P \sim_a Q$, 则称 P 与 Q 在 $P^n(R)$ 中等价, 记作 $P \sim Q$. 记 $\langle P \rangle$ 为 $P \in P^n(R)$ 关于 $\sim$ 的等价类.

定理 3 设 $V^n(R) = \{\langle P \rangle \mid P \in P^n(R)\}$, 规定

$$\langle P \rangle + \langle Q \rangle = \langle P \oplus Q \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \right\rangle$$

则 $V^n(R)$ 为交换幺半群.

证明 显然 $V^n(R)$ 非空, 因为 $V^n(R)$ 至少包含单位元 $\langle 0 \rangle$.

设 $\langle P \rangle, \langle Q \rangle, \langle S \rangle \in V^n(R)$, 则

$$(\langle P \rangle + \langle Q \rangle) + \langle S \rangle = \langle P \rangle + (\langle Q \rangle + \langle S \rangle) = \langle P \rangle + \langle Q \rangle + \langle S \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 \\ 0 & 0 & S \end{pmatrix} \right\rangle$$

故 $V^n(R)$ 为幺半群.

由定理 2可知

$$\langle P \rangle + \langle Q \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \right\rangle = \langle Q \rangle + \langle P \rangle$$

故 $V^n(R)$ 为交换半群.

根据引理, 可得如下命题:

命题 由 n 次幂等矩阵确定的 Grothendieck群存在, 且为 $G(V^n(R))$.

参考文献:

[1] 佟文廷. 代数 K-理论[M]. 南京: 南京大学出版社, 2005.
[2] JONATHAN ROSENBERG. Algebraic K-Theory and Its Applications[M]. GTM, 147, Springer, 1994.
[3] 吴炎, 王鸿绪. 环 Z/P^k 上 s次幂等矩阵及矩阵的加权广义逆[J]. 大学数学, 2004, 20(6): 55-58.
[4] 张俊敏, 成立花, 李祚. 幂等矩阵线性组合的可逆性[J]. 纯粹数学与应用数学, 2007, 23(2): 231-234.
[5] 佟文廷. Grothendieck群及其应用[J]. 南京大学数学半年刊, 1986, 3(1): 1-11.
[6] 陈焕垠. 关于 Grothendieck群的一些结果[J]. 南京大学学报(自然科学版), 1995, 31(1): 1-8.