

简单机构的复杂运动^①

张益群, 朱真兵, 吴广明

(昆明理工大学机电工程学院, 云南昆明 650093)

摘要 从工程应用角度分析了最简单的机械结构(单摆)的全局运动, 包括简谐振动, 非谐振动, 界轨, 连续旋转, 衰减振动, 受迫振动, 周期倍化及混沌振动, 展现了线性振动及非线性振动在全局运动中的地位, 介绍了混沌振动及周期倍化通道.

关键词: 单摆; 全局运动; 混沌振动

中图分类号: O32 文献标识码: A 文章编号: 1007-855X(2001)06-048-05

0 前言

众所周知的单摆是最简单的机械结构之一, 其简图如图 1. 为了能够实现大幅度振动及连续旋转运动, 我们将悬挂摆球 m 的悬线换为无质量的细杆 l , 这种可旋转单摆, 成为机械工程中某些摆动机构或旋转机构的简化模型. 选取 θ 为角位移坐标 (rad), 其运动微分方程(本质上是力矩平衡方程)为

$$ml^2\ddot{\theta} + cl^2\dot{\theta} + mgl\sin\theta = Fl\cos\omega_j t \quad (1)$$

或为

$$\ddot{\theta} + \frac{c}{m}\dot{\theta} + \omega_n^2\sin\theta = \frac{F}{ml}\cos\omega_j t \quad (2)$$

式中, c 为阻尼系数(N·s/m), $\omega_n = \sqrt{g/l}$ 为单摆固有频率(rad/s), F 为摆球所受激振力幅值(N), ω_j 为激振力频率(rad/s), $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$.

将(2)式无量纲化, 可得

$$\theta'' + 2\zeta\theta' + \sin\theta = f\cos\Omega\tau \quad (3)$$

式中, $\zeta = c/(2m\omega_n)$ 为阻尼比, $f = F/(ml\omega_n^2) = F/mg$, $\Omega = \omega_j/\omega_n$, $\tau = \omega_n t$, 为无量纲的激励参数, $\theta' = \frac{d\theta}{d\tau}$.

若摆球不受激励且忽略阻尼, 则得到众所周知的无阻尼自由振动单摆

$$\theta'' + \sin\theta = 0 \quad (4)$$

当最大摆角 $\theta \leq 6^\circ$ (即 0.104rad) 时, (4) 式可线性化为

$$\theta'' + \theta = 0 \quad (5)$$

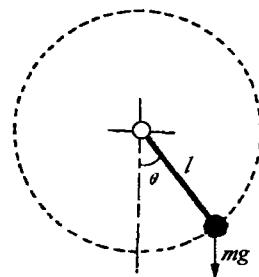


图1 单摆图

(5) 式的自由振动解为 $\theta(t) = \theta_0\cos\omega_n t + (\dot{\theta}_0/\omega_n)\sin\omega_n t$, 这是一个简谐振动, 其振幅 $A = \sqrt{\theta_0^2 + (\dot{\theta}_0/\omega_n)^2}$, 振动频率为固有频率 ω_n , 固有周期 $T = 2\pi\sqrt{l/g}$.

为了得到一个直观、定量的概念, 便于工程应用, 我们设计一个“单位摆”, 它由 1m 长的细杆连接 1kg 的摆球所构成. 对此单位摆, 线性振动具有等时性, 即固有周期 $T = 2s$ 不随振幅而变化, 但对初始激励的限制为 $\sqrt{\theta_0^2 + (\dot{\theta}_0/\omega_n)^2} \leq 6^\circ$, 由此可解出, 仅施加初始位移时, 应有 $\theta_0 \leq 6^\circ$; 仅施加初始速度时, 应有 $\dot{\theta}_0 \leq 0.328 \text{ rad/s}$, 相应的线速度 $V_0 \leq 0.328 \text{ m/s}$, 若 θ_0 或 $\dot{\theta}_0$ 大于以上限值, 即进入了非线性区. 在非线性区里, 单摆丧失了等时性, 其振动周期 T 随振幅增大而延长, 简谐波发生畸变, 甚至出现意想不到的复杂运动.

① 收稿日期: 2001-02-19; 基金项目: 云南省应用基础研究基金资助项目(1999E0030M); 第一作者简介: 张益群, 男, 1943年生, 教授. 研究方向: 机械振动;

本文通过仿真计算, 从工程应用角度分析激励参数对单摆全局运动的影响, 展现非线性区里出现的复杂运动.

1 无阻尼运动

忽略阻尼的单摆运动微分方程(4)式, 它是一个非线性方程, 相应于一种初始激励 (θ_0, V_0) , 即产生一个解, 对应相平面 $(\theta - \theta')$ 的一条相轨线. 图 2 是一系列初始激励下的相图, 它表现了无阻尼单摆的全局运动.

图 2 中, O 点 $(0, 0)$ 为中心点, 对应单摆下垂的平衡位置, 能量最小, 为稳定的不动点, 摆球的摆动就围绕 O 点进行. 而 G 点 $(\pi, 0)$ 对应单摆垂直倒立的位置, 势能最大, 为不稳定的鞍点, 通过鞍点的相轨线称界轨, 它把单摆的运动分为摆动与旋转两个截然不同的类型.

无阻尼单摆是发生摆动或是发生旋转, 完全由初始激励决定. 假设仅施加初始速度 V_0 而初始位移 θ_0 为零, 可沿着纵轴 θ' 按初速度 V_0 由小到大的变化来分析单位摆的运动.

(1) 初始线速度 $V_0 \leq 0.328 \text{ m/s}$ (相当于 $\dot{\theta}_0 \leq 0.328 \text{ rad/s}$), 单摆作线性简谐振动, 其振动周期 $T = 2 \text{ s}$ 保持不变与振幅无关, 因此小幅单摆可用作计时器. 此时相轨线成为圆(或椭圆), 见图 2(a), 位移波形图见图 3(a).

(2) $0.328 \text{ m/s} < V_0 < 6.26 \text{ m/s}$, 在此范围内, 随着初始速度的增加, 单摆振幅相应增大, 振动周期 T 也随之延长, 几何非线性逐渐加强, 此时相轨线逐渐变化偏离圆形, 见图 2(b), 位移波形为非谐, 见图 3(b), 对其进行频率分析, 明显见高次谐波响应.

(3) $V_0 = \sqrt{4gl} \approx 6.26 \text{ m/s}$, 此初始速度恰能使摆达到最高点 $(\theta = \pi)$. 理论上, 摆能在此点永久停留, 周期 $T \rightarrow \infty$, 而实际上摆总要随机地倾向某一边, 因此形成相图中的界轨(异宿轨线)及鞍点 G, 见图 2(c), 位移波形图见图 3(c).

(4) $V_0 > 6.26 \text{ m/s}$, 此时单摆具有了足够的初始能量, 能够转过最高点, 形成连续旋转运动, 其相图呈逃逸型, 见图 2(d), 位移波形图见图 3(d), 注意其瞬时速度是波动的.

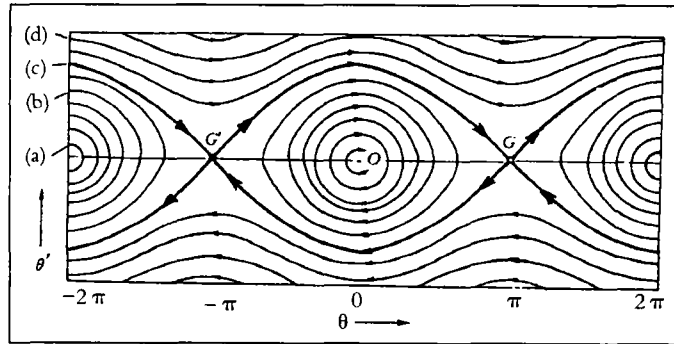


图 2 无阻尼运动相图

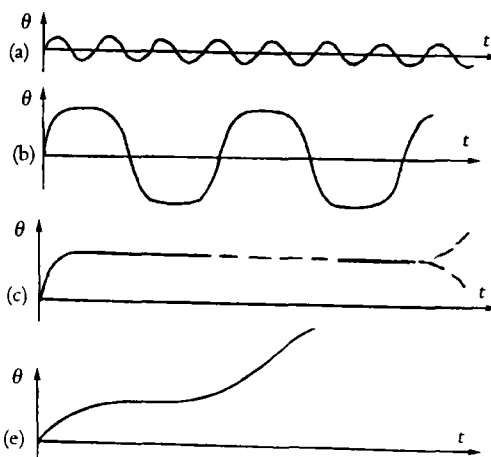


图 3 无阻尼运动位移波形图

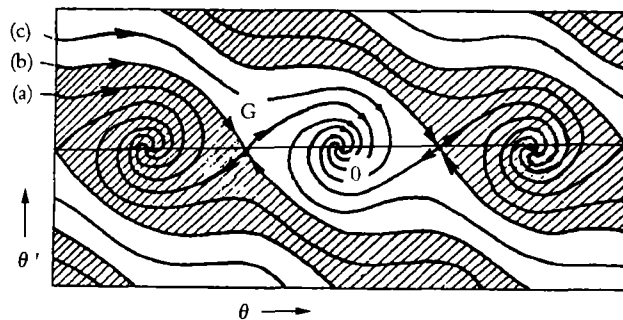


图 4 有阻尼运动相图

2 有阻尼运动

若考虑实际存在的小阻尼 $(\zeta < 1)$ 情况, 则单摆振动微分方程为

$$\theta'' + 2\zeta\theta' + \sin\theta = 0 \tag{6}$$

图 4 是(6)式在一系列初始激励下的相图. 图中 O 点成为稳定焦点, 而 G 点仍为鞍点, 但异宿轨线消失. 通过鞍点的界轨把相平面分隔成不同的区域, 从每一区域中的任一点出发, 轨线都流向该区域中心的稳定焦点, 这就是吸引子及吸引域.

取定 $\zeta = 0.1$, 从单位摆的平衡位置 O 点, 沿着纵轴 θ' 来分析摆的运动:

(1) $V_0 < 9.73 \text{ m/s}$, 单摆作衰减振动, 其相轨线如图 4(a), 位移波形图如图 5(a), 最终衰减至零振幅;

(2) $V_0 = 9.73 \text{ m/s}$, 此初始速度恰能使摆克服阻尼力运动至最高点. 理论上, 摆会在此点停留, 周期 $T \rightarrow \infty$, 而实际上摆总要随机地倾向某一边, 因此形成相图中的界轨及鞍点 G , 见图 4(b), 位移波形图见图 5(b);

(3) $V_0 > 9.73 \text{ m/s}$, 单摆越过最高点后作衰减振动, 其相轨线位于另一区域中, 如图 4(c), 位移波形图如图 5(c). 若 V_0 很大, 则单摆在数次越过最高点(即减速旋转几次)后, 仍作衰减振动, 归于某一焦点, 振幅衰减至 0.

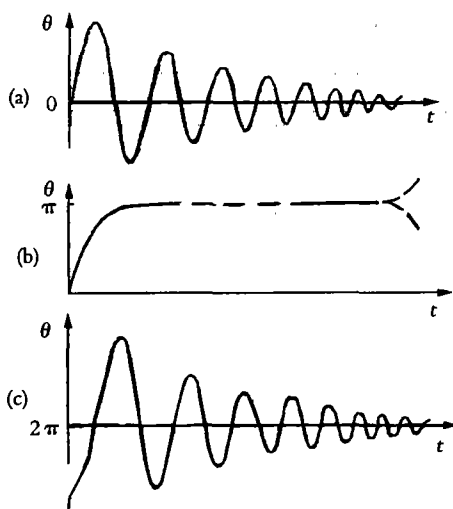


图 5 有阻尼运动位移波形图

3 有阻尼受迫振动

这时, 单摆振动微分方程为(1)式或(3)式, 在任意大振幅下, (1)式的解是十分复杂的. 我们编制了计算机仿真程序, 取定下列参数进行数值模拟, 从一种参数组合中, 展示激励参数对于全局运动的影响. 具体参数为: $m = 1\text{kg}$, $l = 1\text{m}$, $c = 1.565\text{N}\cdot\text{s/m}$, $\omega_j = 2.087\text{rad/s}$, 以激励力 F 为变化的参数, 进行方程(1)解的仿真数值计算, 得到下列结果:

1) $F \leq 0.665\text{N}$, 单摆的振幅 $A \leq 6(\circ)$, 其运动可视为简谐振动, 相轨迹为圆, 响应频率 ω_j 与激励频率相同, 具有频率不变性;

2) $0.665\text{N} < F \leq 10.486\text{N}$, 单摆的运动为非谐周期振动, 其相轨迹变为非圆闭曲线(如图 6), 其响应频率除了激励频率 ω_j 以外, 还出现了其它复杂成份;

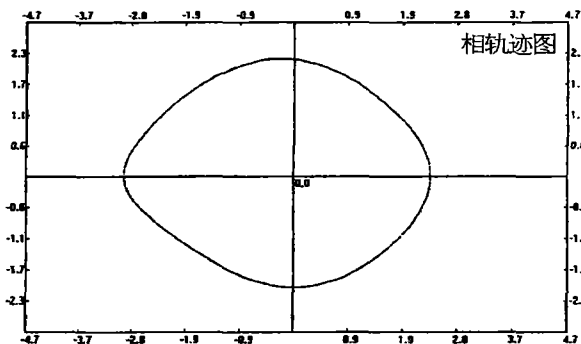


图 6 非谐周期振动相图

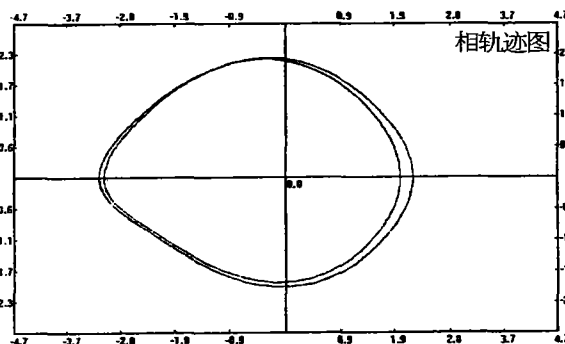


图 7 二倍周期振动相图

3) $F = 10.486\text{N}$, 单摆的振动呈现二倍周期解, 相轨迹、位移速度波形图如图 7;

4) $F = 10.555\text{N}$, 单摆的振动再次周期倍化, 呈现四倍周期解, 见图 8;

5) $F > 11.27\text{N}$, 单摆的相轨迹作貌似无规的复杂运动, 位移、速度波形永不重复, 呈现混沌振动, 见图 9, 说明单摆的运动通过周期倍化而进入了混沌;

6) $F = 13.23\text{N}$, 单摆的运动成为逃逸型, 即出现了非匀速的旋转运动, 但仍属于一倍周期解, 见图 10;

7) $F = 14.21\text{N}$, 单摆的逃逸运动成为二倍周期解, 见图 11;

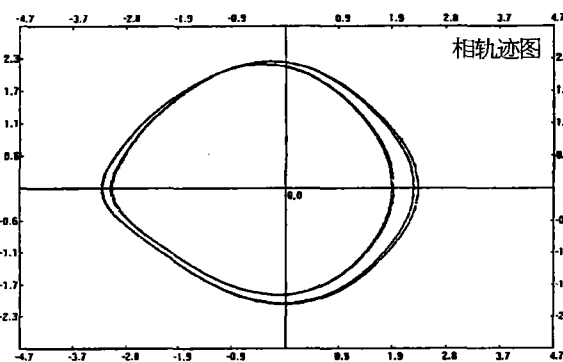


图 8 四倍周期振动相图

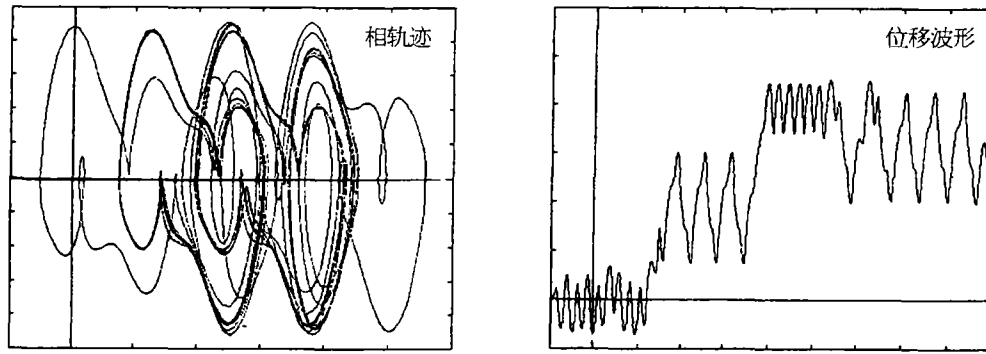


图 9 混沌振动相图及波形图

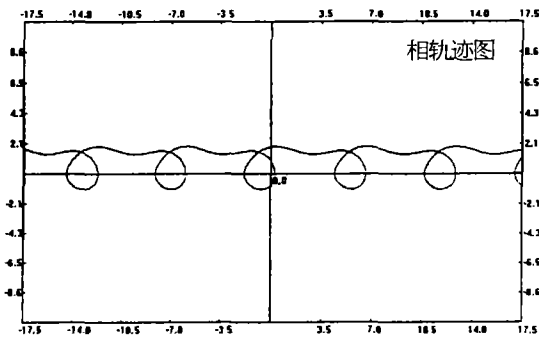


图 10 单周期逃逸运动相图

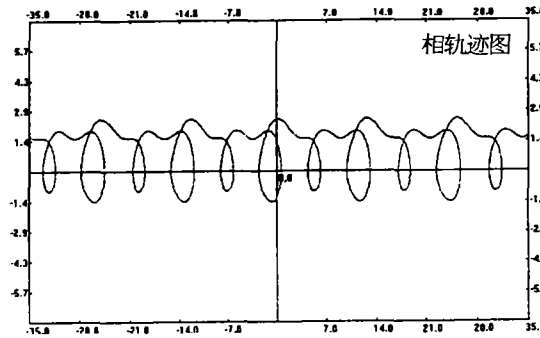


图 11 二倍周期逃逸运动相图

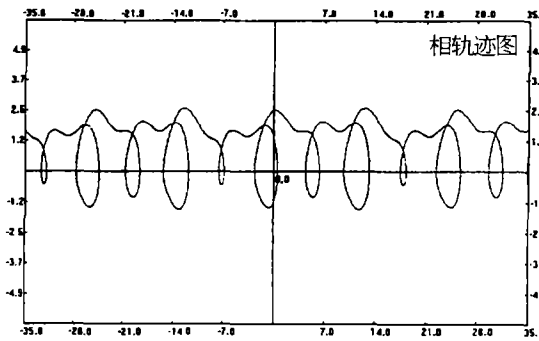


图 12 四倍周期逃逸运动相图

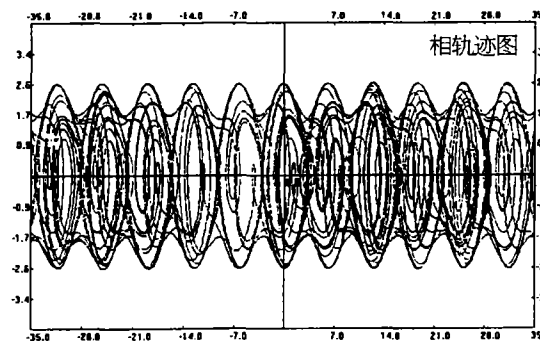


图 13 混沌转动相图

8) $F = 14.41N$, 单摆作四倍周期解的逃逸运动, 见图 12;

9) $F = 10.7N$, 单摆的逃逸轨线呈现杂乱无章永不重复, 说明通过周期倍化出现了混沌转动, 见图

13.

4 结 论

通过对简单机构(单位摆)全局运动的分析及数值仿真计算, 可以明显地看到:

(1) 单摆的线性简谐振动, 仅局限在微幅振动的范围内, 从全局运动来看, 只具有微小的范围, 在线性谐振动的外围, 则广泛存在着非线性区层出不穷的复杂运动;

(2) 随着初始激励的加大, 单摆的运动从简谐振动变化为非谐振动、方向不定的界轨运动及非匀速的旋转运动, 表现了一次性能量输入时, 单摆运动的多样性;

(3) 随着外激振力的加大, 单摆的运动响应从简谐振动逐渐变为非谐振动, 响应频率复杂化, 进而出现周期倍化而进入混沌振动; 继续加大外激振力, 则出现更为剧烈的旋转运动, 再次通过周期倍化而进入

混沌转动,表现了外界激励能量增大时,简单机构中出现的运动的复杂性;

(4) 简单机构也出现极为复杂的运动,其根本原因,在于机构内秉的受力非线性(即恢复力为 $mgsin\theta$).随着激励参数的增大,简单机构通过周期倍化而进入了貌似无规的混沌振动,说明非线性及复杂运动是普遍存在的.上述分析不仅可以在电子计算机上作出仿真,也完全可以用实际机构来实现.

参考文献:

- [1] 周凌云等.非线性物理理论及应用[M].北京:科学出版社,2000.85~111.
- [2] 黄润生.混沌及其应用[M].武汉:武汉大学出版社,2000.31~61.
- [3] 张益群.非线性振动中的混沌现象及混沌摆[J].昆明工学院学报,1992,17(5):59~63.

Complex Movement in Simple Mechanism

ZHANG Yi-qun, ZHU zhen-bing, WU guang-ming

(The Faculty of Mechanical and Electrical Engineering, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, China)

Abstract From the point of view of engineering application, this paper analyses the global motion in the most simple mechanism(i. e. simple pendulum), including harmonic vibration, non - harmonic vibration, critical orbital motion, continuous rotation, decreasing vibration, forced vibration, period - doubling and chaotic vibration. The status of linear vibration and non - linear vibration in the global motion, chaotic vibration and its way of period - doubling are introduced.

Key words: simple pendulum; global motion; chaotic vibration

(上接第 47 页)

Geo - statistics and Its Application in Yuanjiang Gold Mine

YAN Yong - feng, QIN De - xian, HONG Tuo, XIA Ji-sheng

(The Geological Institute of Mineral Deposit, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, China)

Abstract Based on the summarization of geostatistics researching situation, the functions of each module of the Deposit Mathematical and Economical Software are systemically introduced, which is developed by the Mineral and Geology Institute of Kunming University of Science and Technology, A sample is provided on Yuanjiang gold mine, the practicability and the advancement of the software are demonstrated.

Key words: geostatistics; deposit model; reserve estimation