

# 索穹顶结构的有限元法分析和张拉施工方法

刘永清, 黄呈伟, 杨艳华, 陈薇薇

(昆明理工大学 建筑工程学院, 云南 昆明 650224)

**摘要:** 回顾了全张力体系的概念以及索穹顶结构的发展历史, 介绍了索穹顶结构的优缺点. 以有限元分析理论为基础, 采用五节点空间曲线索单元的非线性有限元法分析推导了索穹顶结构的非线性位移关系、几何关系、物理关系、本构关系以及平衡方程. 最后结合模型和工程实际, 提出索穹顶结构的张拉施工方法.

**关键词:** 索穹顶; 有限元法; 非线性分析; 施工方法

**中图分类号:** TU311 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-855X(2003)04-0079-04

## Analysis on the Finite Element Method and Construction Method of Cable Dome Structure

LIU Yong-qing, HUANG Cheng-wei, YANG Yan-hua, CHEN Wei-wei

(Faculty of Architectural Engineering, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650224, China)

**Abstract:** The concept of Full Tensile System and developmental history of cable dome structure are reviewed. The structural virtues and shortcomings of the cable dome are introduced. Based on the theory of finite element, the relationship of nonlinear displacement, geometry, physics and equilibrium equations is analyzed and inferred by the use of nonlinear and finite element analysis about "Five Entries Joints" dimensional curvilinear cell. Construction methods of open and draught are put forward in accordance with the model and actual project in the end.

**Key words:** cable dome; finite element method; nonlinear analysis; construction method

### 0 引言

美国工程师富勒(D. Fuller)提出了“张拉整体(Tensegrity)”的概念,即以连续的受拉钢索为主,以不连续的压杆为辅,组成一种结构体系.美国工程师盖格(Geiger)在富勒的张拉整体结构思想的基础上,发明了支承于周边受压环梁上的一种索杆预应力自平衡的张拉整体索穹顶结构.在国外已经建成了十多个索穹顶结构的实际工程,其中以美国佛罗里达州的太阳海岸穹顶(圆形:  $D=210\text{ m}$ ),韩国汉城的奥运会体操馆(圆形:  $D=119.8\text{ m}$ ),击剑馆(圆形:  $D=120\text{ m}$ ),美国亚特兰大奥运会主馆(椭圆平面:  $240.79\text{ m} \times 193.02\text{ m}$ )和2002年世界杯韩国釜山体育场(圆形:  $D=300\text{ m}$ )等最为瞩目.

目前国内外对索穹顶结构的理论研究和工程实践在逐渐的增加,索穹顶结构具有如下主要优点:(1)绝大部分受力构件可设计成受拉的钢索,截面受力均匀,可充分发挥钢索的高强性能;(2)受拉构件是稳定的,没有失稳问题,不需要考虑弯矩、扭矩和剪力的问题,因此可以用较少的材料跨越和覆盖很大的空间;(3)因压杆数量少、长度短,选用时容易满足其稳定条件.但索穹顶结构亦有其缺点,主要表现为要使结构成形和具有一定的刚度,必须在拉索中施加预应力,这无疑增加了施工的难度.

### 1 索穹顶结构非线性有限元法分析

目前对索穹顶结构的成形分析多以有限元分析理论为基础,根据索穹顶结构的受力特性和变形特性,一般采用二节点直线空间铰接杆单元的非线性模式、三节点曲线索单元模式和五节点空间曲线单元的非线性有限元法.本文采用五节点空间曲线索单元的非线性有限元法,建立并推导出应变的非线性几何关系以及单元的非线性有限元基本方程,为此特作以下基本假定:(1)索是理想柔性的;(2)应力—应变关系满足虎克定律;(3)节点对杆单元转动的影响.

#### 1.1 单元划分和坐标系的建立

对于任意空间索段结构,索段之间由节点连接,如图1(a)所示,现可以将索结构划分为索单元,节点*i, j*之间索段为一个单元.如图1(b)所示,*i, j*分别为该索单元的主节点,在每个索单元中再设三个内插节点*k, l, m*.索结构是在结构的整体坐标系0-XYZ中定义,而对于各个单元可分别建立单元局部坐标系0'-xyz.整体坐标系和单元局部坐标系均为迪卡尔右手直角坐标系,如图2所示,而沿单元弧向可建立坐标系*S*.

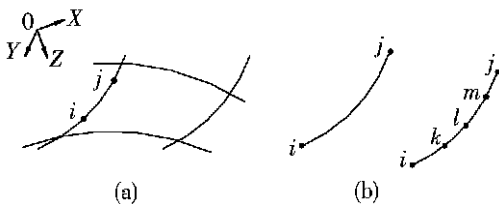


图1 单元的划分

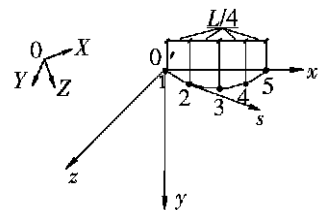


图2 五节点坐标系

#### 1.2 位移函数建立

实际索在自重作用下是呈悬链曲线下垂的,悬链线用Taylor级数展开后可近似表示为四次多项式.设一任意索元,1,5为主节点,内插点为2,3,4.故一个索单元共有五个节点,每个节点有三个自由度,即节点在局部坐标系中有三个线位移,建立如图2所示的五节点坐标系.在单元局部坐标系0'-xyz中,定义单元中任意一点的位移列阵为:

$$U = [u \dots v \dots w]^T \tag{1}$$

单元节点的位移列阵为:

$$u_e = [u_1 \dots v_1 \dots w_1 \dots u_2 \dots v_2 \dots w_2 \dots u_3 \dots v_3 \dots w_3 \dots u_4 \dots v_4 \dots w_4 \dots u_5 \dots v_5 \dots w_5]^T \tag{2}$$

其中  $u_i, v_i, w_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$  分别为节点沿局部坐标系轴  $x, y, z$  方向的三个位移分量.现取单元位移函数为:

$$\begin{aligned} u &= C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + C_5x^4 \\ v &= C_6 + C_7x + C_8x^2 + C_9x^3 + C_{10}x^4 \\ w &= C_{11} + C_{12}x + C_{13}x^2 + C_{14}x^3 + C_{15}x^4 \end{aligned} \tag{3}$$

将上述位移函数写成矩阵形式为:

$$u = a \cdot c \tag{4}$$

在式(4)中,  $u$  为位移列阵,  $a = [1 \ x \ x^2 \ x^3 \ x^4]$ ,  $c$  为位移函数中的系数矩阵.根据单元的节点位移  $u_e$  可以确定以上位移函数中的系数  $C_{ij}$ , 将系数  $C_{ij}$  代入式(3-14)即可求得形函数为:

$$N = a \cdot L \tag{5}$$

而单元位移函数

$$u = N \cdot u_e \tag{6}$$

其中形函数为:

$$N = \frac{1}{3L^4} \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & a_5 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & a_5 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & a_5 \end{bmatrix} \tag{7}$$

### 1.3 结构几何及物理关系

#### (1) 几何关系

在变形前单元中取微段, 则变形后该微段长度为, 根据应变的定义:

$$\varepsilon_s = \frac{ds^* - ds}{ds} = \frac{ds^*}{ds} - 1 \quad (8)$$

由于  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ ,  $ds^* = \sqrt{(dx + du)^2 + (dy + dv)^2 + (dz + dw)^2}$ , 因此有:

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{1 + 2a + b} \quad (9)$$

式中有:

$$a = \frac{dx du + dy dv + dz dw}{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \frac{d}{ds}[uvw] \frac{d}{ds}[xyz]^T, \quad b = \frac{du^2 + dv^2 + dw^2}{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \frac{d}{ds}[uvw] \frac{d}{ds}[uvw]^T \quad (10)$$

将(10)式代入(9)式得:

$$\varepsilon_s = \sqrt{1 + 2a + b} - 1 \quad (11)$$

将[14]式 Taylor 展开并忽略五阶量以上的高阶量为:

$$\varepsilon_s = a + \frac{b}{2} - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{a^3}{2} + \frac{3}{4}a^2b - \frac{b^2}{8} - \frac{5}{8}a^4 \quad (12)$$

#### (2) 物理关系

根据虎克定律:

$$\sigma = E\varepsilon + \sigma_0 \quad (13)$$

式中  $E$  为单元得弹性量,  $\sigma_0$  为单元的初应力.

#### (3) 本构关系

对于非线性问题可以将应变分为线性和非线性两部分,

$$\varepsilon_s = \varepsilon_{L,s} + \varepsilon_{NL,s} \quad (14)$$

式中的  $\varepsilon_{L,s}$  和  $\varepsilon_{NL,s}$  分别为切向线性应变和切向非线性应变, 分别可表示为:

$$\varepsilon_{L,s} = [B_L]\{u_e\}, \quad \varepsilon_{NL,s} = [B_{NL}]\{u_e\} \quad (15)$$

式中的  $[B_L]$  和  $[B_{NL}]$  分别为线性应变矩阵和非线性应变矩阵.

### 1.4 非线性平衡方程

在非线性有限单元法中, 单元的平衡方程可以根据虚功原理来建立. 在单元局部坐标系下, 虚功方程为:

$$\int_v \delta f \Delta \varepsilon]^T \sigma d\sigma = \int_v \delta u^T f dv + \int_s \delta u^T \bar{f} ds \quad (16)$$

式(16)中  $f$  和  $\bar{f}$  分别为在单元局部坐标系下索单元所受的体力和面力列阵. 通过非线性应变矩阵, 即可以得到单元局部坐标系下单元的非线性有限元基本方程为:

$$K_T u_e = (K_L + K_{NL} + K_C) u_e = p_e + p_e^0 + r_e \quad (17)$$

其中  $K_T$  为单元在局部坐标系下的切线刚度矩阵; 单元的非线性刚度矩阵  $K_{NL} = \frac{1}{2} \int_v \tilde{B}_{NL}^T D \tilde{B}_{NL} dv$ ; 单元在局部坐标系下的切线刚度矩阵  $K_L = \int_v B_L^T D B_L dv$ ; 单元的几何单元刚度矩阵  $K_C$  有:  $K_C = \int_c G^T M G H dv$ ; 单元的初始应力等效的节点力向量  $p_e^0 = - \int_v B_L^T \sigma^0 dv$ ; 作用于单元的外荷载等效节点力向量  $p_e = \int_v N^T f dv + \int_s N^T \bar{f} ds$ ; 单元的赘余力向量或不平衡力向量  $r_e$  有:  $r_e = \left[ \frac{1}{2} \int_v B_L^T D \tilde{B}_{NL} dv + \int_v B_{NL}^T D B_L dv \right] u_e$ ; 经如前所述的坐标变换即可得到整体坐标系下单元的非线性有限元基本方程:

$$\bar{K} r u_e = \bar{p}_e \quad (18)$$

(18) 式中单元在整体坐标系下的切线刚度矩阵  $\overline{K}_T = T^T K_T T$ . 在得到了单元刚度矩阵后即可装配成结构的总刚度矩阵, 从而得到结构的非线性有限元基本方程组为:

$$KU = R \quad (19)$$

式中  $K$  称为结构的切线刚度矩阵; 式(19)即为结构的非线性有限元平衡方程, 它是一非线性方程组, 求解该非线性方程组即可求得结构的各节点位移, 然后根据单元的物理及几何条件就可求得单元的内力.

## 2 索穹顶结构的张拉施工

经验告诉我们, 施工方法必须与结构型式、与结构设计的力学模型相统一, 这样才能保证施工过程中的受力合理性, 并能保证与最终完成的建筑型态是统一的. 结合文献[1]以及青岛颐中体育场的实际工程, 为此本文提出如下索穹顶结构的施工方法:

- 1) 在场地中心搭一临时塔架, 将中心拉力环吊至塔架上, 并用千斤顶调整中心拉力环的高度, 以达到设计标高.
- 2) 在地面上将各组径向屋面脊索与压杆上端连好.
- 3) 将斜索连与相应的压杆的底部节点, 并把每道环索分为数段, 分段与相应压杆下段相连.
- 4) 完成上述连接后, 即可将径向索两端分别提升到环梁和中心拉环上与环梁和中心拉环相连, 形成一松弛且环索不连续的悬吊索——杆体系.
- 5) 最后连接每段环索, 完成结构各组构件的连接. 因径向索两段已经挂好, 故连接各段环索时需要一可移动支撑设备.
- 6) 由内向外收紧环索, 重复此步骤, 直至达到设计的预张状态.
- 7) 最后铺设屋面材料, 并固定在脊索上.

## 3 结论

本文以有限元分析论理为基础, 提出五节点空间曲线索单元的非线性有限元法分析推导索穹顶结构的非线性位移关系、几何关系、物理关系、本构关系以及平衡方程, 通过计算分析与模型实验研究表明, 理论上五节点空间曲线单元计算的精度比二节点直线单元与三节点单元好, 且该方法是正确可靠的. 目前国内有中国建筑科学研究院、天津大学、同济大学、昆明理工大学、浙江大学、北方交通大学等高校和研究单位从事索穹顶结构的理论研究, 但都还只是停留在对索穹顶结构计算和方法的研究阶段, 虽然已解决了结构设计计算问题, 但无论在理论分析方面, 还是在施工技术、建筑材料、工程应用以及施工张拉控制技术等方面都还有很多的工作要做.

### 参考文献:

- [1] 黄呈伟, 等. 索穹顶结构的施工张拉及其模拟计算[J]. 昆明理工大学学报(理工版), 2000, 25(1): 15~ 19.
- [2] 郑君华. 索穹顶结构的理论分析与设计计算:[学位论文][D]. 昆明理工大学建工学院, 2003.
- [3] 钱若军, 等. 索穹顶结构的特性及分析[J]. 建筑结构学报, 1998, 19(2): 23~ 29.
- [4] 唐建民, 等. 索穹顶结构非线性分析的有限元法[J]. 同济大学学报, 1996, 24(1): 8~ 13.
- [5] 谢如彪. 非线性数值分析[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1984. 54~ 97.
- [6] 杨维国, 等. CT型张拉整体结构的受力性能分析[J]. 钢结构, 2002, 17(57): 7~ 9.