第29卷 第3期 昆明理工大学学报(理工版) Vol.29 No.3
2004年6月 Journal of Kunming University of Science and Technology (Science and Technology) Jun. 2004

考虑交易成本和优良资产的资本性资产定价模型

罗秋兰, 陈有禄
(广西工学院 管理系,广西 柳州 545006)

摘要: Sharpe 的 CAPM 理论是现代金融理论的核心内容,已被广泛应用于金融资产定价分析及投资决策等领域,但该模型过于严格的基础假设,尤其是忽略交易成本和优良资产的存在,使模型的应用范围和使用效果受到了限制.通过引入交易成本和优良资产,讨论在资本市场中单个风险资产的风险与回报的关系,从而得到一种新的更为适用的资本性资产定价模型修正模型 SCAPM.改进后的 CAPM,更加贴近资本证券市场的实际.

关键词: 优良资产;交易成本; CAPM
中图分类号:F830.59 文献标识码:A 文章编号:1007 - 855X(2004)03 - 0128 - 04

Study of the Capital Asset Pricing Model with a Superior Asset and Transaction Cost

LUO Qiu-lan CHEN You-lu
(Department of Management, Guangxi University of Technology, Liuzhou 545006, China)

Abstract: Sharpe's CAPM theory is the core of modem financial theories, and has been widely applied to the fields such as pricing analysis of financial assets and investment decision - making, etc. However, the rigid basic hypothesis of the mode make the applied scope and usage effect of CAPM to be bounded, especially in ignoring the existence of transaction, costs and superior assets. By means of considering transaction, cost and superior assets, the relation between the expected rate of an individual asset and its individual risk in a capital market is studied, and a kind of the adaptable revised model of capital asset pricing model (SCAPM) is given. The improved CAPM mode will be more appropriate for the real situation of the capital security market.

Key words: superior assets; transaction costs; CAPM

0 引 言

Sharpe 建立在均值 - 方差分析基础上的资本性资产定价模型(CAPM)是一种理论上相当完美的模型,它是现代金融理论的三大基石之一,也是 Sharpe1990 年获得诺贝尔经济学奖的主要原因.该模型解释了为什么不同的证券会有不同的回报率,这套理论体系由于其简单、直观的特点使之从创立之日起便得到了广泛的应用,并受投资者青睐,使得原本像巫术一样的金融变成了一门真正的科学[1].

然而,该模型是建立在众多严格的假设前提之上的,而这些繁多的且与现实相去甚远的假设前提却无疑成为其广泛应用的障碍.因此,在 CAPM 模型提出以后,经济学家们便致力于放松其严格的假设前提,使之逐渐接近于现实,以提高模型的实用性,并由此得出了许多新的修正模型.布莱克(Black,1972年)和布鲁南(Brennan,1970年)放松了模型无税收和无风险利率不变的假设;莫顿(1973年)对 CAPM 置于前后联结的实际范围内,成功地将模型单周期的局限性进行了拓展,建立了时际资本性资产定价模型(I-CAPM);布里顿(Breeden,1979年)提出了消费导向的资本性资产定价模型(CCAPM).另外,经济学家们还在建立非均衡定价模型和国际型资产定价模型方面取得了一定的成果[2].

收稿日期:2004 - 03 - 08. 基金项目:广西自然科学基金资助(项目编号:桂科自 0385008),广西工学院科研基金资助项目(项目编号:030111).
第一作者简介:罗秋兰(1962～),女,副教授.主要研究方向:金融分析及应用. E - mail:luoqiul@163.com

文章通过引进优良资产,放松了 Sharpe 的资本性资产定价模型的假设条件,即引进了交易成本,且不需要考虑市场是否均衡,讨论了资本市场中单个风险资产的风险与回报的关系,即利用投资者认可的某种优良资产来度量单个风险资产的风险与回报的关系,并给出了风险资产的一种新的风险度量公式及其经济意义,使许多相关表达式易于测算,从而得到一种新的更为适用的资本性资产定价模型(SCAPM).

1 具有交易成本和优良资产的投资组合均值 —方差模型

所谓优良资产是指有较高的期望回报率,或者有较低的标准差,或者资产间相关性较低的资产[3].

考虑交易成本,并设投资组合包含有 $n+1$ 种资产,其中有 n 种普通资产(文中将非优良资产称为普通资产)和一种优良资产,因而总投资组合的回报率也分为两部分:优良资产的回报和 n 种普通资产投资组合的回报.为讨论问题方便引进以下记号:

r_s:优良资产的回报率;r_n:n 种普通资产投资组合的回报率;μ_s:优良资产的期望回报;μ_n:n 种普通资产投资组合的期望回报;R_f:借或贷的无风险利率;σ_s:优良资产回报的标准差;σ_n:n 种普通资产投资组合回报的标准差;r_{sn}:优良资产与普通资产的投资组合的相关系数;p:投资在优良资产的财富比例;$1-p$:投资在普通资产投资组合的财富比例;$c(n_s)$:具有优良资产证券组合的单位资产投资成本(即为总成本/总财富).

由假设知,总投资组合的收益率为:$r_p = pr_s + (1-p)r_n$;

总投资的组合期望的收益为:$\mu_p = p\mu_s + (1-p)\mu_n$; (1)

总投资组合的方差为:$\sigma_p^2 = p^2\sigma_s^2 + (1-p)^2\sigma_n^2 + 2p(1-p)\sigma_s\sigma_n r_{sn}$; (2)

总投资组合的风险报酬为:

$$m = \frac{\mu_p - R_f - c(n_s)}{\sigma_p} = \frac{p\mu_s + (1-p)\mu_n - R_f - c(n_s)}{\sqrt{p^2\sigma_s^2 + (1-p)^2\sigma_n^2 + 2p(1-p)\sigma_s\sigma_n r_{sn}}}; \tag{3}$$

优良资产的风险报酬为:$m_s = \dfrac{\mu_s - R_f - c(n_s)}{\sigma_s}$

(其中,$\mu_s - R_f - c(n_s)$ 为考虑交易成本的优良资产的超回报);

n 种普通资产的风险报酬为:$m_n = \dfrac{\mu_n - R_f - c(n_s)}{\sigma_n}$

(其中,$\mu_n - R_f - c(n_s)$ 为考虑交易成本的 n 种普通资产的超回报)[4].

2 具有优良资产的投资组合和资本市场线研究

引理 1　若将一种优良资产与 n 种普通资产做投资组合,且考虑交易成本,则当投资在优良资产的投资比例满足下列式子时,投资组合的风险报酬 m 最大,即

$$p = \frac{\mu - r_{sn}\sigma}{\mu + \sigma^2 - r_{sn}\sigma(1+\mu)} \tag{4}$$

其中

$$\mu = \frac{\mu_s - R_f - c(n_s)}{\mu_n - R_f - c(n_s)},\ \sigma = \frac{\sigma_s}{\sigma_n}. \tag{5}$$

证明:为使表达式简便起见,令:

$A = \mu_s - \mu_n$;$B = \mu_n - R_f - c(n_s)$;$D = \sigma_s^2 + \sigma_n^2 - 2\sigma_s\sigma_n r_{sn}$;$E = \sigma_n^2 - \sigma_s\sigma_n r_{sn}$.

代入(3)式,整理得:

$$m = \frac{pA + B}{\sqrt{p^2D - 2pE + \sigma_n^2}}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}p} = \frac{A}{\sigma_p} - \frac{(pA+B)(pD-E)}{\sigma_p^3}$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}p} = 0$,则有,$A\sigma_p^2 = (pA+B)(pD-E)$,将 $\sigma_p^2 = p^2D - 2PE + \sigma_n^2$ 代入并解出 p,得:

$$p = \frac{A\sigma_n^2 + BE}{AE + BD} \tag{6}$$

将 A, B, D 的假设代入(6)式,将分子、分母同除 $(\mu_n - R_f - c(n_s))\sigma_n^2$ 整理,得:

$$p = \frac{\dfrac{\mu_s - R_f - c(n_s)}{\mu_n - R_f - c(n_s)} - \dfrac{\sigma_s}{\sigma_n} r_{sn}}{\dfrac{\mu_s - R_f - c(n_s)}{\mu_n - R_f - c(n_s)} + \dfrac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2} - \dfrac{r_{sn}\sigma_s}{\sigma_n}\left(1 + \dfrac{\mu_s - R_f - c(n_s)}{\mu_n - R_f - c(n_s)}\right)}$$

将(5)式代入,整理得:$p = \dfrac{\mu - \sigma r_{sn}}{\mu + \sigma^2 - \sigma r_{sn}(1 + \mu)}$

即(4)式成立,故引理1成立.

引理2 考虑具有优良资产和交易成本的投资组合,如果将所有资产全部投资于普通资产(即当时 $p = 0$),则有:

$$u_n = R_f + c(n_s) + \frac{\mu_s - R_f - c(n_s)}{\sigma_n r_{ns}}\sigma_n \tag{7}$$

证明:当 $p = 0$ 时,表示投资者将全部资产投资于普通资产,此时,由(4)式有:

$\mu - r_{sn}\sigma = 0$,即 $\mu = r_{sn}\sigma$

代入(5)式得到: $\dfrac{\mu_s - R_f - c(n_s)}{\mu_n - R_f - c(n_s)} = \dfrac{\sigma_s}{\sigma_n} r_{sn}$,即有:

$\mu_n = R_f + c(n_s) + \dfrac{\mu_s - R_f - c(n_s)}{\sigma_s r_{sn}}\sigma_n$,故引理2成立.

此时,(7)式是资本市场线的一种新的表达形式,也将之称为具有优良资产的资本市场线(SCML).它通过某种优良资产的回报和标准差给出了证券组合的期望回报和标准差的线性关系.

3 具有优良资产的资本性资产定价模型 SCAPM(CAPM 的修正模型)

考虑单个风险证券和具有优良资产 S 的投资组合 P.设在证券投资比例为 x_i,则在优良资产 S 上投资比例为 $1 - x_i$,因而证券组合的期望回报和标准差为:

$$\mu_p = x_i\mu_i + (1 - x_i)\mu_s \tag{8}$$

$$\sigma_p = [x_i^2\mu_i^2 + (1 - x_i)^2\mu_s^2 + 2x_i(1 - x_i)\sigma_{is}]^{\frac{1}{2}} \tag{9}$$

其中,μ_i 和 σ_i 分别为第 i 个风险证券的期望回报和标准差,σ_{is} 为第 i 个风险证券与优良资产的协方差.证券组合 P 的期望回报 μ_p 和标准差 σ_p 的关系如图1所示的连线 i 和 S 的曲线[4].

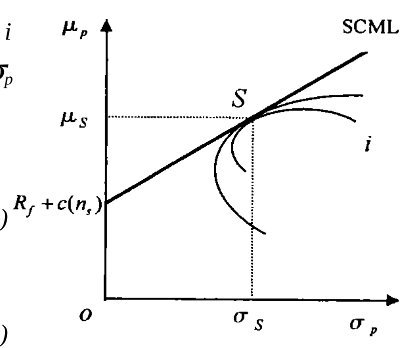

图1 期望回报 μ_p 和 σ_p 标准差关系

(8)式关于求 x_i 导,得

$$\frac{d\mu_p}{dx_i} = \mu_i - \mu_s \tag{10}$$

(9)式关于 x_i 求导,得

$$\frac{d\sigma_p}{dx_i} = \frac{x_i\sigma_i^2 - (1 - x_i)\sigma_s^2 + (1 - 2x_i)\sigma_{is}}{[x_i^2\sigma_i^2 + (1 - x_i)^2\sigma_s^2 + 2x_i(1 - x_i)\sigma_{is}]^{\frac{1}{2}}} \tag{11}$$

由(10),(11)式得:

$$\frac{d\mu_p}{d\sigma_p} = \frac{(\mu_p - \mu_s)[x_i^2\sigma_i^2 + (1 - x_i)^2\sigma_s^2 + 2x_i(1 - x_i)\sigma_{is}]^{\frac{1}{2}}}{x_i\sigma_i^2 - (1 - x_i)\sigma_s^2 + (1 - 2x_i)\sigma_{is}}$$

在其中令 $x_i = 0$,得到曲线 iS 在 S 点的斜率:

$$\left.\frac{d\mu_p}{d\sigma_p}\right|_s = \frac{(\mu_i - \mu_s)\sigma_s}{\sigma_{is}\sigma_s^2}$$

又 CML 线(7)式在点 S 的斜率为 $\dfrac{\mu_s - R_f - c(n_s)}{\sigma_s r_{sn}}$,故由相切,有

$$\frac{(\mu_i - \mu_s)\sigma_s}{\sigma_{is}\sigma_s^2} = \frac{\mu_s - R_f - c(n_s)}{\sigma_s r_{sn}}$$

整理为

$$\mu_i = R_f + c(n_s) + (\mu_s - R_f - c(n_s))\left(1 + \frac{\sigma_{is}}{\sigma_s^2 r_{sn}} - \frac{1}{r_{sn}}\right) \tag{12}$$

如令 $\beta_i = 1 + \frac{\sigma_{is}}{\sigma_s^2 r_{sn}} - \frac{1}{r_{sn}}$,称 β_i 为证券 i 的 β 系数,式(12) 可以表示为

$$\mu_i = R_f + c(n_s) + (\mu_s - R_f - c(n_s))\beta_i \tag{13}$$

也可以写为

$$\mu_i - R_f - c(n_s) = (\mu_s - R_f - c(n_s))\beta_i \tag{14}$$

其中,$\mu_i - R_f - c(n_s)$ 为考虑交易成本的证券 i 的超回报,$\mu_s - R_f - c(n_s)$ 为考虑交易成本的优良资产的超回报. 故有以下定理:

定理(SCAPM)　在考虑具有交易成本和优良资产的资本市场中,任何风险资产的超回报和优良资产的超回报成比例关系,即有关系式

$$\mu_i - R_f - c(n_s) = (\mu_s - R_f - c(n_s))\beta_i$$

其中,$\beta_i = 1 + \frac{\sigma_{is}}{\sigma_s^2 r_{sn}} - \frac{1}{r_{sn}}$.

该定理结论称为具有优良资产的资本性资产定价模型,即 SCAPM. 它是 Sharpe 的 CAPM 的一种修正模型.

SCAPM 未涉及市场是否均衡的条件,在考虑交易成本的前提下,揭示了资本市场中单个风险资产的风险与回报的关系,表明可以利用投资者认可的某种优良资产来度量单个风险资产的风险与回报的关系. 而 Sharpe 的 CAPM 揭示了在完善的资本市场当市场达到均衡时,单个风险证券的超回报与市场证券组合的超回报成比例关系,两者相比较,SCAPM 所涉及的相关指标更易测算,从而也更具理论意义和实用价值.

参考文献:

[1] 杨云红. 金融经济学[M]. 武汉:武汉大学出版社,2001. 118～135.
[2] 陈雨露. 现代金融理论[M]. 北京:中国金融出版社,2000. 241～260.
[3] Azriel Levy, Miles livingstion. The Gains from Diversification Reconsidered: Transaction Costs and Superior Information[J]. Financial Markets, Institution & Instruments,1995,(4):35～50.
[4] 李楚霖,杨明,易江. 金融分析及应用[M]. 北京:首都经贸大学出版社,2002. 31～37.