

# 阶比跟踪中的惠特克插值

高艳, 郑华文, 陈永星

(昆明理工大学 机电工程学院, 云南 昆明 650093)

**摘要:** 阶比跟踪技术是旋转机械升、降速振动信号分析的重要方法之一, 等角度采样又是实现阶比跟踪的关键. 为获得等角度采样数据通常是对原等时间间隔采样数据进行插值计算获得. 介绍了一种基于惠特克重构理论, 应用加窗 sinc 插值法由原有等时间间隔采样数据实现等角度重采样的方法. 与以往采用的线性插值、多项式插值法相比, 这种方法具有无理论误差, 可在较低采样率下实现高精度插值等优点. 实际测试验证了这种方法可以有效地实现等角度重采样.

**关键词:** 阶比跟踪; 旋转机械; 插值

**中图分类号:** TH115 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007 - 855X(2007)03 - 0030 - 05

## Whittaker Interpolation in Order Tracking

GAO Yan, ZHENG Hua-wen, CHEN Yong-xing

(Faculty of Mechanical and Electrical Engineering, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, China)

**Abstract:** Order tracking plays an important role in the vibration signal analysis of rotating machinery's run-up and coast-down. The key to order tracking is the so-called equiangular sampling. To do equiangular sampling, digital resampling is often employed by interpolated original equal time interval sampled data. For the ideal interpolation for digital resampling in order tracking, a method of digital resampling based on Whittaker reconstruction and a windowed-sinc interpolation algorithm, is introduced. Compared with linear interpolation and Lagrange interpolation, etc., which are commonly used in digital resampling, it has some distinguished advantages, such as no interpolation error in theory and obtaining high precise resampling data with low sampling rate. The actual tests are also introduced to demonstrate the validity of the method presented.

**Key words:** order tracking; rotating machinery; interpolation

## 0 引言

阶比分析是旋转机械升降速振动信号特征分析的重要方法之一, 它可以有效地对旋转机械特升降速过程中的非稳定振动信号进行分析. 阶比跟踪技术的关键在于如何实现所谓的“等角度采样”. 文中介绍了一种基于惠特克重构理论的插值方法, 并利用本方法实现了阶比跟踪中的等角度重采样. 实际测试证明本方法可有效地应用于旋转机械阶比分析中.

## 1 旋转机械阶比分析实现方法简介

旋转机械特升、降速振动信号是典型的非稳定变频信号. 直接对其进行频谱分析将产生严重的“频率模糊”, 为解决这一问题, 产生了角域采样理论和建立在其基础上的阶比分析理论. 阶比分析在实现上主要取决于如何实现相对于参考轴的恒角度增量采样. 在旋转机械升、降速阶段参考轴的转速是变化的, 对其转速进行跟踪并实现恒角度增量采样的过程称为阶比跟踪采样<sup>[1,2]</sup>.

### 1.1 等角度采样的实现方法

等角度采样的实现可分为基于硬件的阶比跟踪、计算阶比跟踪<sup>[3,4]</sup>和基于瞬时频率的阶比跟踪<sup>[2]</sup>, 其

收稿日期: 2006 - 11 - 29. 基金项目: 云南省自然科学基金资助项目 (项目编号: 2004E0011Q).

第一作者简介: 高艳 (1963 - ), 女, 讲师. 主要研究方向: 机械自动化. E-mail: YanGAO@163.com

中基于硬件的阶比跟踪法中是用角度编码器产生采样触发信号以外触发方式控制 A/D 采集装置进行采样实现的,而后两种阶比跟踪法中均需通过对原等时间间隔采样数据的插值进行重采样实现。

硬件阶比跟踪由于在实施上易受到现场测试条件的限制,局限性较大,后两种阶比跟踪法在应用上有显著的优势,因此,如何合理地选取插值方法对阶比跟踪中等角度采样的实现有重要意义。

### 2.2 阶比跟踪中的传统插值方法

如同键相脉冲的到达时间决定了重采样时刻的精度一样,插值方法的精度决定了重采样的幅值精度。文献 [3] 中研究了计算阶比分析中通常使用的拉格朗日 (Lagrange) 多项式插值方法得到以下结论:若采样率满足

$$f_s \gg 2f_{max} \tag{1}$$

式中  $f_s$  为采样频率,  $f_{max}$  为信号中的最高频率成分对应的频率。在高速采样条件下 (研究中采样频率为信号滤波截止频率的 16 倍以上),最简单的线性插值可取得较好的效果,这也是在文献 [2] 中直接采用简单的分段线性插值的原因。

文献 [3] 同时指出由于振动信号是由循环事件产生的似正弦信号而非多项式,因此这些插值法存在固有的近似误差,并将这些误差最终代入阶比分析中。而理论上应该比较适合的正弦曲线插值在实际实施中不可行,因为其要求有正弦频率成分的先验知识。

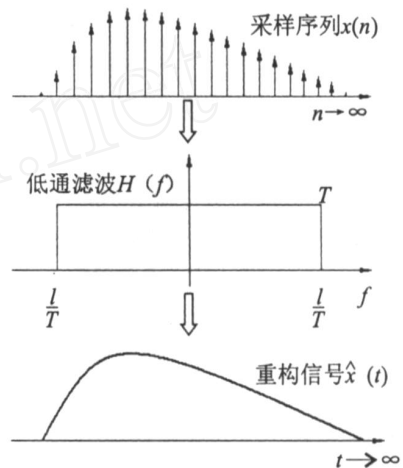


图1 惠特克重构示意图  
Fig.1 Scheme of Whittaker's interpolation

## 2 惠特克重构插值

为了有效克服阶比分析中常用的多项式插值方法存在固有近似误差的缺点,显然采用不存在近似误差的插值方法是一有效途径。在此基础上,文中提出了基于惠特克 (Whittaker) 信号重构理论的阶比跟踪插值方法,下面对其进行详细论述。

### 2.1 惠特克重构理论

根据 Shannon 采样定理,在满足采样定理的条件下,任何频率有限信号都可以由其离散时间样本实现精确重构,而 sinc 函数则是实现信号重构的理想重构滤波器。惠特克重构理论可用图 1 表示:将频率有限信号  $x(t)$  的采样序列  $x(n)$  输入截止频率为  $1/T$  ( $T$  为采样间隔) 的低通重构滤波器  $H(f)$  滤出不包含在原信号  $x(t)$  中的一切频率分量就可得到  $x(t)$  的精确重构函数,且当满足采样定理时,在理论上  $\hat{x} = x(t)$ 。

根据惠特克重构理论<sup>[5]</sup>有

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \text{sinc} [ (t - nT) / T ] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{\text{sin} [ (t - nT) / T ]}{(t - nT) / T} \tag{2}$$

式中  $x(t)$  为原始信号的函数表示,  $x(n)$  表示  $x(t)$  的第  $n$  个采样点,  $T$  为采样间隔。式 (2) 即为惠特克重构公式,惠特克重构理论表明任何频率有限信号  $x(t)$  可由其采样点和“基函数”—— Sinc 函数通过插值实现重构,因此,惠特克重构公式又称为 Sinc 插值。

### 2.2 加窗 Sinc 插值算法

近年来对 sinc 插值的相关理论及快速算法研究很多。从理论上对任何一个给定值的插值点都可以由式 (2) 确定出其值,即实现原信号  $x(t)$  的精确重构。但实际应用中会发现,由于式中累加变量  $n$ ,式 (2) 在实际应用中是不可行的。因此,在实际应用中如何解决这一问题成为实现 Sinc 插值的关键。

注意到在离散傅里叶变换的实际算法中总是对有限的  $N$  点进行计算,而  $N$  点的选取则是通过对信号进行加窗实现的。由此可想到,在 Sinc 插值算法中是否可以通过加窗的方法来实现累加变量  $n$  的最大值从有限个数  $N$  的转变。答案是肯定的,在文献 [5, 6] 中对这一方案进行了深入研究。因此,对式 (2) 进行加窗可得到:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{N-1} w(n) x(n) \frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{(t-nT)/T} \quad (3)$$

式中  $w(nT)$  为所加时窗的离散采样序列, 其长度为  $N$ , 也即实际信号重构中所需要的采样点数. 根据三角公式

$$\sin[\pi(t-nT)/T] = \sin\frac{t}{T} \cos n\pi - \cos\frac{t}{T} \sin n\pi = (-1)^n \sin\frac{t}{T} \quad (4)$$

式(3)还可进一步简化为

$$x(t) = \sin\frac{t}{T} \sum_{n=0}^{N-1} w(n) x(n) \frac{(-1)^n}{t-nT} \quad (5)$$

不难发现, 式(4)与式(3)相比在计算量上大大减少.

如何选取窗长  $N$  是另一个在实际应用中应注意的问题, 并且对插值精度有较大影响. 一方面  $N$  值理论上越大插值精度越高, 另一方面由于 Sinc 函数的值随  $n$  的增加会显著减小, 过大的  $N$  值对提插值高精度的作用很小, 反而会造成计算量增加. 在研究中, 窗长  $N$  选择原始 Sinc 函数左右各第 5 个过零点间的长度.

### 2.3 阶比跟踪中的 sinc 插值实现

具体算法步骤如下:

1) 瞬时频率估计. 通过时频分析(如 STFT 等)利用峰值搜索法获得参考轴离散瞬时频率, 具体算法请参见文献[2];

2) 瞬时频率拟合. 在小范围内对离散瞬时频率用最小二乘拟合获得连续瞬时频率估计方程(即求出拟合方程系数  $a, b, c$ ), 具体算法见文献[2].

$$f_i(t) = at^2 + bt + c \quad (6)$$

式中  $f_i(t)$  为连续瞬时频率估计.

3) 鉴相时标计算. 用式(6)得到的小范围最小二乘拟合瞬时频率估计曲线—— $f_i(t)$  来产生相应的鉴相时标. 设各点采样时刻为  $T_n$ ,  $f_i(t)$  为瞬时频率, 则有

$$2 \int_{T_0}^{T_n} f_i(t) dt = n \quad n = 1, 2, 3, \dots, N \quad (7)$$

式中  $n$  为采样时刻序列号;  $\Delta = \Delta O_{\max}$  (最大理论阶比分析范围), 为恒定角度增量;  $N$  为 FFT 长度.

对于旋转机械升、降速阶段, 若  $f_i(t)$  满足光滑连续条件(在机器升、降速阶段基本满足), 在小范围内用拟合多项式或样条方程实现高精度逼近是可行的, 因此, 若  $f_i(t) = at^2 + bt + c$ , 则可得

$$\frac{a^3}{3} + \frac{b^2}{2} + c^2 = \frac{n}{2 \Delta O_{\max}} - \frac{a^3}{3} + \frac{b^2}{2} + c^2 \quad (8)$$

式中  $O_{\max}$  表示最大理论阶比分析范围,  $T_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots, N$ ) 为鉴相时标,  $N$  为阶比分析 FFT 长度. 求此方程的有效解(实际中为数值解), 即可求得等角度采样的鉴相时标  $t_n$ .

4) 基于 Sinc 插值的数据重采样. 如前所述, 相对参考轴进行等角度采样是阶比分析的要求, 传统阶比分析中是用硬件方式提供每转一个或多个鉴相脉冲实现. 文中提出的方法中采用前面求得的鉴相时标  $t_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, K$ ) 对采样后获得的原始数据用式(4)进行 sinc 插值实现, 相应的插值公式为

$$x(t_k) = \frac{\sin[\pi(t_k/T)]}{\pi/T} \sum_{n=0}^{N-1} w(n) x(n) \frac{(-1)^n}{t_k - nT} \quad (9)$$

研究中选用 Kaiser 窗对 Sinc 函数进行截断, 对应的离散时窗  $w(nT)$  序列由下式计算

$$w(n) = \begin{cases} \frac{I_0\left(a \sqrt{1 - (2n/N - 1)^2}\right)}{I_0(a)} & 0 \leq n < N \\ 0 & \text{其余} \end{cases} \quad (10)$$

式中  $N$  为窗长,  $a$  为一可调控制参数(控制 Kaiser 窗的形状),  $I_0$  的选择可参考相关文献, 在本研究中取  $a = 10$ ,  $I_0$  为 0 阶第一类贝塞耳函数, 定义为<sup>[7]</sup>

$$I_0(x) = \frac{1}{s=0} \frac{1}{(s!)^2} \left(\frac{x}{2}\right) \tag{11}$$

### 3 测试试验

#### 3.1 试验介绍

为验证本方法的正确性,进行了仿真和实际测试试验.现将一转子试验介绍如下:转子试验装置如图 2 所示,转子由一直流电机驱动,其转速可由输入电压控制,在本试验中输入电压为 150 V,对应转速约为 8 000 r/min,使用一探头直径为  $\phi 8$  的涡流传感器测量转子径向位移(传感器用磁力座固定,如图 2 所示),传感器参数:灵敏度:4 mV/ $\mu\text{m}$ ,量程:4 mm,分辨率:4  $\mu\text{m}$ ,工作频率范围:0~3 000 Hz 信号采样率为 10 kHz,采样数据长度为 150  $\times$  1 024 数据点.该信号在 4 倍降采样后的 STFT 时频谱图如图 3 所示,可看出该信号 1 阶分量突出.

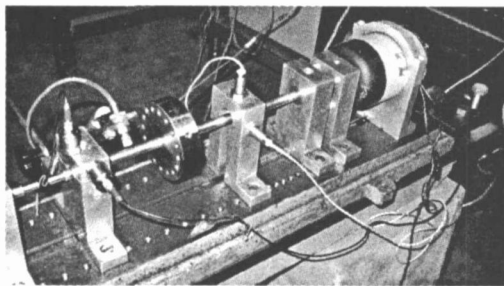


图2 转子试验装置  
Fig.2 Test rig

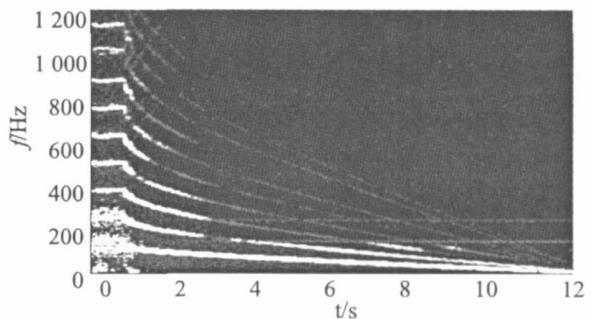


图3 信号的STFT时频谱图(4倍降采样)  
Fig.3 STFT spectrogram of test signal (under down-sampling ratio 4)

为提高瞬时频率估计精度需对原信号进行降采样处理<sup>[2]</sup>.在 16 倍降采样条件下,即在数据分析中信号采样率变为 10 000 Hz/16 = 625 Hz,并对 1 阶分量进行峰值搜索,得到的 STFT 时频谱图和峰值搜索结果如图 4 所示(峰值搜索结果 1 阶分量中间的深色点).应用 2.3 节所述步骤和算法实现基于瞬时频率估计和惠特克插值的阶比跟踪,得到的该信号在 7 000 r/min (转/分)转速下的阶比谱如图 5 所示,而对应时间区间内的信号幅值谱如图 6 所示,对比图 5 与图 6 所示结果,不难看出图 6 中的高频分量发生了所谓的“频率模糊”.

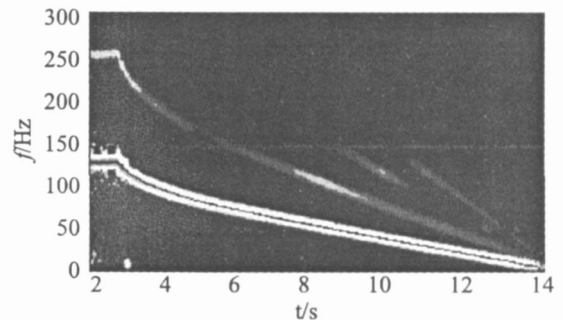


图4 峰值搜索结果(16倍降采样)  
Fig.4 Result of peak search

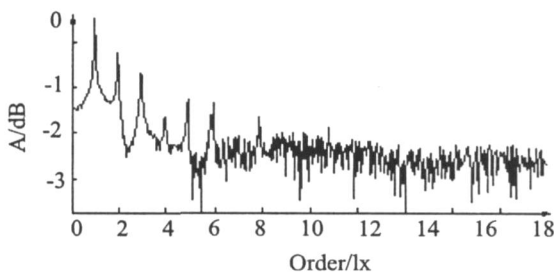


图5 7 000 r/min 时基于 sinc 插值的阶比谱  
Fig.5 Order spectrum based sinc interpolation at 7 000 r/min

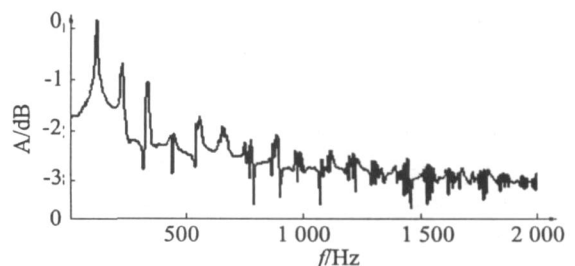


图6 7 000 r/min 时信号的幅值谱  
Fig.6 Amplitude spectrum of the signal at 7 000 r/min

## 5 结语

由实际测试可看出用这种方法可有效实现旋转机械的阶比跟踪.提出的基于惠特克插值的阶比跟踪与原方法<sup>[2]</sup>中使用的线性插值相比具有其突出的优点,即可在较低采样率下实现数据的高精度插值进而实现阶比跟踪,在实际应用中可降低对采集设备的采样率要求,是对原有技术的有力补充.方法由软件实现,特别适合于虚拟仪器发展的要求<sup>[8]</sup>,有良好的应用前景和价值.

### 参考文献:

- [1] Opatinskaia E L, Zhu J, Mathew J. Monitoring Varying Speed Machinery Vibration-II Recursive Filters and Angal Domkain [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 1995, 9(6): 647 - 655.
- [2] 郭瑜, 秦树人. 基于瞬时频率估计的旋转机械阶比跟踪 [J]. 机械工程学报, 2003, 39(3): 32 - 36.
- [3] Fyfe K R, Munck E D S. Analysis of Computed Order Tracking [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 1997, 11(2): 187 - 205.
- [4] Bossley K M, Mckendrick R J, Harris C J, et al. HYBR D COMPUTED ORDER TRACKNG [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 1999, 13(4): 627 - 641.
- [5] Hoffmann G. Windowed Sinc Interpolation [EB/OL]. www.fho-enden.de/~hoffmann/lanczos07112002.pdf 2005 - 10 - 18.
- [6] Luo Deyang. Digital resampling for frequency tracking in engineering signal analysis [J]. Proceeding of A sisa-Paccific Vibration '97. Kyongju, Korea, 1997. 658 - 662.
- [7] Fumas C C. Evaluation of the Modified Bessel Function of the First Kind and Zeroth Order [J]. American Mathematical Monthly, 1930, 37(6): 282 - 287.
- [8] 郭瑜, 罗德扬. 基于瞬时频率估计的瀑布图分析 [J]. 昆明理工大学学报: 理工版, 2005, 30(3): 42 - 45.

(上接第 22 页)

### 参考文献:

- [1] 赵翠青. 当前中国锌工业的发展形势与思考 [J]. 中国金属通报, 2005, 23: 4 - 5.
- [2] 苏鸿英. 2006年西方铅精矿供应大有潜力 [J]. 中国金属通报, 2006, 50: 29 - 30.
- [3] 丁培培, 伍海华. 关于经济系统混沌存在性判断的讨论 [J]. 价值工程, 2005, 6: 8 - 11.
- [4] 刘洪. 混沌理论的预测原理 [J]. 科技导报, 2004, 2: 13 - 16.
- [5] Gitter M. Order and Chaos: Are They Contradictory or Complementary [J]. European Journal of Physics, 2002, 23(2): 119 - 122.
- [6] 李建功. 中国期货市场的混沌研究 [J]. 重庆邮电学院学报, 2004, 59(1): 54 - 56.
- [7] Serletis A, Shintani M. No Evidence of Chaos But Some Evidence of Dependence in the US stock market [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2003, 17(2 - 3): 449 - 454.
- [8] Albano A M, Muench J, Schwartz C, et al. Singular-value Decomposition and the Grassberger - Procaccia Algorithm [J]. Phys Rev. A, 1988, 38: 3017 - 3026.
- [9] 权先璋, 蒋传文, 张勇传. 径流预报的混沌神经网络理论及应用 [J]. 武汉城市建设学院学报, 1999, 16(3): 33 - 36.
- [10] Tiwari R K, Rao K N. Phase Space Structure, Attractor Dimension, Lyapunov Exponent and Nonlinear Prediction from Earth's Atmospheric Angular Momentum Time Series [J]. Pure Appl Geophys, 1999, 156: 719 - 736.
- [11] Wolf A, Swift J B, Swinney H L. Determining Lyapunov Exponents From a Time Series [J]. Physica D, 1985, 16: 285 - 317.
- [12] 陈士华, 陆军安. 混沌动力学初步 [M]. 武汉: 武汉水利电力大学出版社, 1998.
- [13] George E P B, Gwilym M J, Gregory C R. 时间序列分析 [M]. 顾岚译. 北京: 中国统计出版社, 1997.
- [14] 潘文杰. 傅里叶分析及其应用 [M]. 北京: 北京大学出版社, 2000.