集值映射的近似算子及其性质

蔡井伟,陈世联
(昆明理工大学 理学院,云南 昆明 650093)

摘要: 集值映射是研究随机集和证据理论的基础. 文中给出了集值映射的概念及其上(下)近似,给出了与经典粗糙集相类似的一些性质. 在此基础上进一步研究了其他的一些重要性质,得到了一些重要结论.

关键词: 粗糙集;集值映射;粗集理论
中图分类号: TP18 **文献标识码**: A **文章编号**: 1007 - 855X(2006)01 - 0122 - 03

Approximate Operators of Set - Valued Mapping and Their Properties

CAI Jing-wei, CHEN Shi-lian
(Faculty of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, China)

Abstract: Set - valued mapping is the basis of the study on the Random Set and the theoretical evidences. The concept of set - valued mapping and its upper (lower) approximate operator are given, and a series of properties like classic rough set are also provided. Upon them many of other important properties are subsequently studied. A series of important conclusions are achieved.

Key words: rough set; set - valued mapping; rough set theory

0 引 言

1982年,波兰数学家 Pawlak教授提出了 Rough集理论[1],被称为经典的 Rough集. 目前,对 Rough集理论的研究集中在数学性质、Rough集的扩展模型与其它不确定方法的关系和互补以及有效算法等方面[2]. 集值映射的 Rough集模型就是 Pawlak Rough集模型的一种扩展,该理论在随机集、证据理论等方面现已有广泛应用. 所以对它进行深入的研究具有理论意义和实际意义.

1 预备知识

定义 1[3] 设 U是对象集,W是另一个集合或空间,$P(W)$表示 W的子集全体,称 $F: U\rightarrow P(W)$是集值映射. 对于任意 $X\in W$ 记

$$\underline{F}(X)=\{x\in U: F(X)\subseteq X\};$$

$$\overline{F}(X)=\{x\in U: F(X)\cap X\neq\varnothing\};$$

则 $\underline{F}(X)$和 $\overline{F}(X)$分别称为 X关于集值映射的下近似和上近似; $\underline{F}, \overline{F}: P(W)\rightarrow P(U)$ 分别称为下近似算子和上近似算子.

引理 1[3] 对于任意 $X, Y\subseteq W$,有下列性质:

(1) $\underline{F}(X)=\sim\overline{F}(\sim X)$; $\overline{F}(X)=\sim\underline{F}(\sim X)$;

(2) $\underline{F}(X\cap Y)=\underline{F}(X)\cap\underline{F}(Y)$; $\overline{F}(X\cup Y)=\overline{F}(X)\cup\overline{F}(Y)$;

收稿日期: 2005 - 01 - 23.
第一作者简介:蔡井伟(1976. 12~),男,在读硕士生. 主要研究方向:粗集理论与决策分析.
E - mail: jingwei_cai@126. com

(3) $\underline{F}(X \cup Y) \supseteq \underline{F}(X) \cup \underline{F}(Y)$; $\overline{F}(X \cap Y) \subseteq \overline{F}(X) \cap \overline{F}(Y)$;

(4) $\underline{F}(W) = U$; $\overline{F}(\varnothing) = \varnothing$.

2 主要结论

定理 1　设 $F: U \to P(U)$ 是集值映射,则下列条件等价:

(1) $\overline{F}\{x\} \neq \varnothing (\forall x \in U)$;

(2) $F(U) = U$.

证明　(1) $\Rightarrow$ (2) $\forall x \in U$, $\overline{F}\{x\} \neq \varnothing$,则 $\exists y \in \overline{F}\{x\}$根据上近似的定义有 $F(y) \cap \{x\} \neq \varnothing$,故 $F(y) \supseteq \{x\}$,所以 $x \in F(y)$,即 $\forall x \in U$, $\exists y \in \overline{F}\{x\}$使得 $x \in F(y)$,故 $U \subseteq F(U)$. 另外, $F(U) \subseteq U$,故 $F(U) = U$.

(2) $\Rightarrow$ (1) 若存在 $x \in U$,使得 $\overline{F}\{x\} = \varnothing$,则对于 $\forall y \in U$,有 $F(y) \cap \{x\} = \varnothing$,所以 $F(y) \subseteq U - \{x\}$. 这与 $F(U) = U$矛盾.

定理 2　设 $F: U \to P(U)$ 是集值映射,则下列条件等价:

(1) $\forall x, y \in U$, $y \in F(x)$,则 $x \in F(y)$;

(2) $X \subseteq \underline{F}\overline{F}(X)$. $(\forall X \subseteq U)$;

(3) $\overline{F}\underline{F}(X) \subseteq X$. $(\forall X \subseteq U)$.

证明　(1) $\Rightarrow$ (2) 对于 $\forall x \in X$及 $y \in F(x)$,有 $x \in F(y)$,因此, $x \in F(y) \cap X$,这说明 $F(y) \cap X \neq \varnothing$. 由上近似的定义得 $y \in \overline{F}(X)$. 由 $y \in F(x)$的任意性可得 $F(x) \subseteq \overline{F}(X)$. 由下近似的定义得 $x \in \underline{F}\overline{F}(X)$, 这就证明了 $X \subseteq \underline{F}\overline{F}(X)$.

(2) $\Rightarrow$ (1) 设 $x, y \in U$, 且 $y \in F(x)$,由于 (2) 成立可得 $\{x\} \subseteq \underline{F}\overline{F}(X)$,所以 $x \in \underline{F}\overline{F}\{x\}$,由下近似的定义得 $F(x) \subseteq \overline{F}(X)$,结合 $y \in F(x)$ 得 $y \in \overline{F}\{x\}$,从而 $F(y) \cap \{x\} \neq \varnothing$,所以 $x \in F(y)$.

(2) $\Rightarrow$ (3) 可由引理 1的性质 (1) 得到.

定理 3　设 $F: U \to P(U)$ 是集值映射,则下列条件等价:

(1) $\forall x, y, z \in U$, $y \in F(x)$, $z \in F(y)$,则 $z \in F(x)$;

(2) $\forall x, y \in U$, $y \in F(x)$,则 $F(y) \subseteq F(x)$;

(3) $\underline{F}(X) \subseteq \underline{F}\underline{F}(X)$　$(\forall X \subseteq U)$;

(4) $\overline{F}\overline{F}(X) \subseteq \overline{F}(X)$　$(\forall X \subseteq U)$.

证明　(1) $\Rightarrow$ (2) 显然.

(2) $\Rightarrow$ (3) 对于 $\forall x \in \underline{F}(X)$,由下近似的定义 $F(x) \subseteq X$,对于 $\forall y \in F(x)$ 由 (2) 可得 $F(y) \subseteq F(x)$,从而 $F(y) \subseteq X$,由下近似的定义可知 $y \in \underline{F}(X)$,由 $y \in F(x)$ 的任意性可得 $F(x) \subseteq \underline{F}(X)$,再由下近似的定义可得 $x \in \underline{F}\underline{F}(X)$,因此, $\underline{F}(X) \subseteq \underline{F}\underline{F}(X)$.

(3) $\Rightarrow$ (4) 可由引理 1的性质 (1) 得到.

(4) $\Rightarrow$ (1) 设 $y \in F(x)$,并且 $z \in F(y)$,则 $F(y) \cap \{z\} \neq \varnothing$,由上近似的定义可得 $y \in \overline{F}\{z\}$,结合 $y \in F(x)$,有 $y \in F(x) \cap \overline{F}\{z\}$,这说明 $F(x) \cap \overline{F}\{z\} \neq \varnothing$,从而 $x \in \overline{F}\overline{F}\{z\}$,由 (4) 成立可得 $x \in \overline{F}\{z\}$,于是, $F(x) \cap \{z\} \neq \varnothing$,故 $z \in F(x)$,这样我们就从 $y \in F(x)$和 $z \in F(y)$ 得到了 $z \in F(x)$. 从而 (1) 成立.

定理 4　设 $F: U \to P(U)$ 是集值映射,则下列条件等价:

(1) $\forall x, y, z \in U$, $y \in F(x)$, $z \in F(x)$,则 $z \in F(y)$;

(2) $\forall x, y \in U, y \in F(x)$,则 $F(x) \subseteq F(y)$;

(3) $\overline{F}(X) \subseteq \underline{F}\overline{F}(X) \quad (\forall X \subseteq U)$;

(4) $\overline{F}\underline{F}(X) \subseteq \underline{F}(X) \quad (\forall X \subseteq U)$.

证明 (1) $\Leftrightarrow$(2) 显然.

(2) $\Rightarrow$(3) 设 $x \in \overline{F}(X)$,由上近似的定义可得 $F(x) \cap X \neq \emptyset$,对于 $\forall y \in F(x)$ 由 (2) 得 $F(x) \subseteq F(y)$,故 $F(y) \cap X \neq \emptyset$,即 $y \in \overline{F}(X)$,由 $y \in F(x)$ 的任意性知 $F(x) \subseteq \overline{F}(X)$,由下近似的定义可得 $x \subseteq \underline{F}\overline{F}(X)$,所以 $\overline{F}(X) \subseteq \underline{F}\overline{F}(X)$.

(3) $\Rightarrow$(1) 设 $y \in F(x)$,并且 $z \in F(x)$,由 $z \in F(x)$ 知 $F(x) \cap \{z\} \neq \emptyset$,故 $x \in \overline{F}\{z\}$,由 (3) 成立得到 $x \in \underline{F}\overline{F}\{z\}$,由下近似的定义知 $F(x) \subseteq \overline{F}\{z\}$,结合 $y \in F(x)$ 得 $y \in \overline{F}\{z\}$,再由上近似的定义有 $F(y) \cap \{z\} \neq \emptyset$,即 $z \in F(y)$,这样我们就从 $y \in F(x)$ 和 $z \in F(x)$ 得到了 $z \in F(y)$.

(3) $\Rightarrow$(4) 可由引理 1的性质 (1) 得到.

3 结束语

集值映射的粗糙集模型是经典 Pawlak粗糙集模型的推广,是研究随机集与证据理论的基础,本文对集值映射近似算子的性质进行了深入研究,得到了一些重要的结论,这些结论可为进一步研究随机集、证据理论以及粗集代数奠定一些理论基础.

参考文献:

[1] PAWLAK Z Rough Sets [J]. International Journal of Computer and Information Science, 1982, 11(5): 341～356.
[2] 刘少辉,盛少戬,吴斌,等. 计算机学报 [J]. 2003, 26(5): 524～529.
[3] 张文修,梁怡,吴伟志. 信息系统与知识发现 [M]. 北京: 科学出版社, 2003. 134～140.
[4] 张文修, 吴伟志,梁吉业,等. 粗糙集理论与方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2001. 41～53.

(上接第 121页)

“$\Leftarrow$”由定理 1即得.

定理 4 设 (U, A, F, D, G) 为目标信息系统,则

1) 0上分布协调集必为 0下分布协调集;

2) 0上近似协调集必为 0下近似协调集.

证明 由上述定理可得.

参考文献:

[1] PAWLAK Z Rough Sets: Theoretical Aspects of Reasoning about Pata[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1991.
[2] 张文修, 吴伟志, 梁吉业,等. 粗糙集理论与方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2001.
[3] 张文修, 吴伟志, 梁怡. 信息系统与知识发现 [M]. 北京: 科学出版社, 2003.
[4] 米据生, 吴伟志, 张文修. 基于变精度粗糙集理论的知识约简方法 [J]. 系统工程理论与实践, 2004, (1): 76～81.