

高斯光束照射下的圆盘衍射

李汝烯, 环敏, 李茂琼

(大理学院 物理与电子信息学院, 云南 大理 671003)

摘要: 基于圆孔光阑函数展开为复高斯函数和的方法, 用 Collins 积分公式, 导出了高斯光束照射下圆盘衍射的光场近似解析表达式, 经计算机数值计算, 对高斯光束照射下圆盘衍射的衍射特性进行了详细的分析.

关键词: 高斯光束; Collins 积分; 光衍射

中图分类号: O4-34 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-855X(2007)05-0122-03

A Circular Disc Diffraction of Gaussian Beam

LI Ru-xi HUAN Min, LI Mao-qion

(School of Physics and Electronic Information, Dali College, Dali Yunnan 671003 China)

Abstract Based on Collins integral formula and the expansion of the hard aperture function into a finite sum of complex Gaussian functions, the approximate analytical expression of the diffraction field of Gaussian beam by a circular disc is derived, and its characteristics are analyzed by the numerical calculation and numerical simulation.

Key words Gaussian beam; Collins integral formula; optical diffraction

0 引言

圆盘衍射实验是光学中的一个著名实验. 该实验是泊松在巴黎科学院研究菲涅耳的论文时, 把它作为菲涅耳光的波动理论论点谬误的证据提出来的, 阿拉果首次做出了相应的实验, 证实了菲涅耳理论的正确性. 教学中应用理论分析菲涅耳圆屏衍射时, 光源用点光源, 入射光波为球面波, 而实际课堂演示实验中, 一般用激光作光源, 入射光束是圆高斯光束. 这 2 种光束衍射的结果差异引起大家的广泛研究, 现有文献 [1, 2] 对圆盘衍射的研究只局限于讨论轴上的光强分布, 对于观察面上的光强分布则没有讨论, 本文应用把光阑窗口函数展开为复高斯函数的和的方法, 应用 Collins 积分公式^[3], 得到了高斯光束照射下的圆盘衍射光场分布的近似解析表达式, 并用计算机数值计算的方法研究了衍射特征.

1 高斯光束照射下圆盘衍射光场分布的近似解析表达式

如图 (1), 取圆盘所在平面为入射面, 入射面上的光场分布为:

$E_0(r_0, \varphi_0)$, 入射面和观察面之间光学系统的变换矩阵为: $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$. 其

中 A, B, C, D 为光学系统的变换矩阵的矩阵元. 根据 Collins 积分公式, 观察面上的光场分布为:

$$E(r, \varphi) = \frac{-i}{\lambda B} \exp(ikl) \iint_{\Sigma} E_0(r_0, \varphi_0) \cdot \exp\left[\frac{ik}{2B}[Ar_0^2 - 2r_0r \cos(\varphi_0 - \varphi) + Dr^2]\right] \cdot r_0 dr_0 d\varphi_0 \quad (1)$$

上式中 l 为沿轴上光程. 积分范围遍布入射面光场分布的平面.

设圆盘半径为 a , 光轴通过圆盘中心, 为计算方便, 设入射面上的光场分布为:

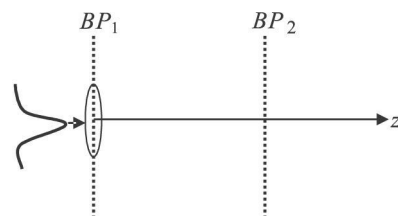


图1 高斯光束照射圆盘示意图

Fig.1 Gaussian beam irradiating a disc

收稿日期: 2007-06-14

第一作者简介: 李汝烯 (1963-), 男, 副教授. 主要研究方向: 激光光束变换和物理教学. E-mail: ynnx@21cn.com

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$E_0(r_0, \varphi_0) = \exp\left[-\frac{r_0^2}{\omega_0^2}\right] \quad (2)$$

把 (2) 式代入 (1) 式, 观察面上的光场分布:

$$E(r, \varphi) = \frac{-i}{\lambda B} \exp(ikl) \int_a^\infty r_0 dr_0 \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \exp\left[-\frac{r_0^2}{\omega_0^2}\right] \cdot \exp\left[\frac{ik}{2B} [Ar_0^2 - 2r_0 r \cos(\varphi_0 - \varphi) + Dr^2]\right] d\varphi_0 \quad (3)$$

应用积分公式: $\int_0^{2\pi} \exp(ikr \cos(\varphi_0 - \varphi)) d\varphi_0 = 2\pi \cdot J_0(x)$ 得:

$$E(r, \varphi) = \frac{-i}{\lambda B} \exp\left[ikl + \frac{kD}{2B} r^2\right] \int_a^\infty \exp\left[\left(\frac{kA}{2B} - \frac{1}{\omega_0^2}\right) r_0^2\right] \cdot J_0\left(\frac{krr_0}{B}\right) dr_0 \quad (4)$$

令 $\phi(r) = \exp\left[ikl + \frac{kD}{2B} r^2\right]$, $\frac{1}{\omega^2} = -\left(\frac{kA}{2B} - \frac{1}{\omega_0^2}\right)$ 则:

$$E(r, \varphi) = \frac{-i}{\lambda B} \phi(r) \int_a^\infty \exp\left[-\frac{r_0^2}{\omega^2}\right] \cdot J_0\left(\frac{krr_0}{B}\right) r_0 dr_0 =$$

$$\frac{-i}{\lambda B} \phi(r) \left(\int_0^\infty \exp\left[-\frac{r_0^2}{\omega^2}\right] \cdot J_0\left(\frac{krr_0}{B}\right) r_0 dr_0 - \int_0^a \exp\left[-\frac{r_0^2}{\omega^2}\right] \cdot J_0\left(\frac{krr_0}{B}\right) r_0 dr_0 \right) \quad (5)$$

引入圆孔光阑窗口函数, $\alpha(r_0) = \begin{cases} 1 & r_0 \leq a \\ 0 & r_0 > a \end{cases}$, 则 (5) 式变为:

$$E(r, \varphi) = \frac{-i}{\lambda B} \phi(r) \int_a^\infty \exp\left[-\frac{r_0^2}{\omega^2}\right] \cdot J_0\left(\frac{krr_0}{B}\right) r_0 dr_0 =$$

$$\frac{-i}{\lambda B} \phi(r) \left(\int_0^\infty \exp\left[-\frac{r_0^2}{\omega^2}\right] \cdot J_0\left(\frac{krr_0}{B}\right) r_0 dr_0 - \int_0^a \exp\left[-\frac{r_0^2}{\omega^2}\right] \cdot J_0\left(\frac{krr_0}{B}\right) r_0 dr_0 \right) \quad (6)$$

把圆孔光阑窗口函数展开为复高斯函数之和^[4]:

$$\alpha(r_0) = \sum_{n=1}^N a_n \exp\left[-\frac{b_n}{a^2} r_0^2\right] \quad (7)$$

a_n, b_n 为复数, 可通过计算机优化而得到, a_n, b_n, N 取值可参看文献 [4]. 把 (7) 式代入 (6) 式, 并应用积分

公式: $\int_0^\infty \exp(-\beta \cdot x^2) J_0(\gamma \cdot x) dx = \frac{1}{2\beta} \exp\left[-\frac{\gamma^2}{4\beta^2}\right]$, 经积分运算得观察面上光场的近似解析表达式:

$$E(r, \varphi) = \frac{-i}{\lambda B} \phi(r) \left\{ -\frac{\omega^2}{2} \exp\left[-\frac{\omega^4 k^2 r^2}{4B^2}\right] - \sum_{n=1}^N A_n \exp\left[-\frac{k^2 r^2}{4B^2 W_n^2}\right] \right\} \quad (8)$$

上式中, $A_n = \frac{a_n}{2 \left[\frac{1}{\omega^2} + \frac{b_n}{a^2} \right]}$, $W_n = \left[\frac{1}{\omega^2} + \frac{b_n}{a^2} \right]$. 观察面上的光强分布:

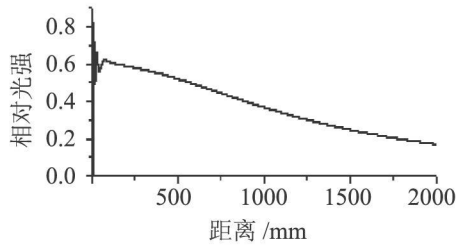
$$I(r, \varphi) = E(r, \varphi) \times E^*(r, \varphi) \quad (9)$$

2 数值计算与分析

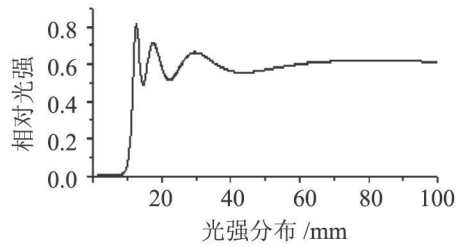
2.1 轴上的光强分布

若盘后为自由空间, 则光学系统的变换矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. 取 $a = 0.25 \text{ mm}$, $\omega_0 = 1.0 \text{ mm}$, $\lambda = 0.6328 \text{ }\mu\text{m}$.

在 Mathematica 环境下进行数值计算, 轴上光强分布如图 2 图中 (a) 图是 z 从 0 到 2 000 mm 内轴上光强分布图. 图 (b) 是轴上光强在 z 从 0 到 100 mm 内光强的精细分布. 从图知, 在靠近圆盘的一小部分区域的轴上光强为零, 区域的范围随圆盘半径的增大而增加. 当离盘的距离增加到某一值时轴上光强开始不为零, 迅速增大到一最大值, 以后随距离的增加而逐渐减少, 但始终不为零, 也就是说超过这一距离后轴上始



(a) Z在0~2000 mm强光分布图



(b) Z在0~100 mm内的精细分布图

图2 轴上相对光强分布图

Fig.2 Intensity distribution on the axes

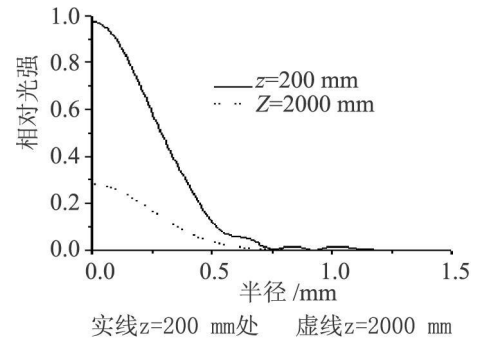
终是亮点.

2.2 轴上光强与圆盘半径关系曲线

图 (3)是 $z = 200\text{mm}$ 和 $z = 2000\text{mm}$ 处轴上光强随圆盘半径变化的关系曲线,从图中可以看出轴上光强随圆盘半径的增加而减少.当圆盘半径过大时,轴上光强为零,即不发生衍射现象.

2.3 观察面上的光强分布

图 (4)是 $z = 1250\text{mm}$ 处观察面上的光强分布图,从图知主极大外有一“耳朵”,与文献 [2] 的实验结果相同.图 (5)是对应图 (4)的等高线图,从图知,除中心主极大外,轴外还有次极大,但强度较弱.



实线z=200 mm处 虚线z=2000 mm

图3 轴上光强随圆盘半径变化图
Fig.3 Axial intensity change with the radius of disc

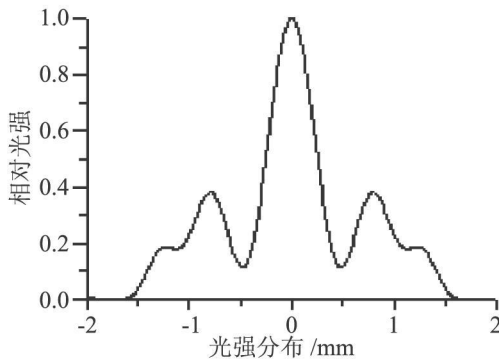


图4 $z=1250\text{mm}$ 处的光强分布

Fig.4 Intensity Distribution at Z=1250mm

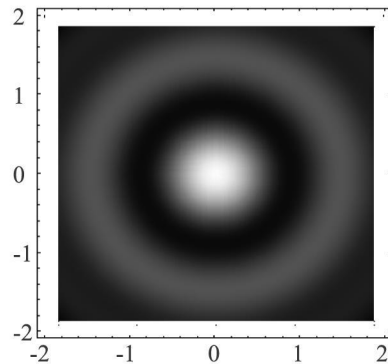


图5 出射面上的等高线图

Fig.5 Contour line on output plane

3 结论

我们应用把圆孔光阑函数展开为复高斯函数和的方法,用 Collins 积分公式推导得出圆盘衍射光场的近似解析表达式,经计算机数值计算分析了轴上和观察面上的光强分布以及轴上光强随圆盘半径变化的情况.计算结果与其它文献的实验结果相同,但计算机用时较少.

参考文献:

[1] 王忠纯. 高斯光束下的圆屏衍射 [J]. 大学物理, 2003(22): 22- 24
 [2] 让庆澜. 高斯光束照射下的圆盘夫琅禾费衍射 [J]. 大学物理, 1997(16): 7- 9
 [3] Collins S A. Lens- system diffraction inegralwriten in terms of matrix optics [J]. JOpt Soc Am, 1970(60): 1168
 [4] W J J Breazeak M A. A diffraction beam field expressed as the superposition of Gaussian beams [J]. JAcoust Soc Am., 1988(83): 1752- 1756