第 32卷 第 3期 昆 明 理 工 大 学 学 报 (理 工 版) Vol 32 No. 3
2007年 06月 Journal of Kunming University of Science and Technology (Science and Technology) Jun. 2007

Besov空间的小波逼近

杨柱元[1], 杨宗文[2], 刘永平[3]
(1. 云南民族大学 数学与计算机科学学院,云南 昆明 650031; 2. 云南大学 数学系,云南 昆明 650091;
3. 北京师范大学 数学系, 北京 100875)

摘要: 首先给出了 Sobolev空间利用小波算子逼近的逼近阶以及逼近阶对 K-泛函的控制估计,进一步给出了小波算子对 Besov空间的逼近和刻画.

关键词: Besov空间; 小波变换; 等价定理
中图分类号: O174.41 **文献标识码**: A **文章编号**: 1007-855X(2007)03-0116-04

Approximation Equivalent Theorem for Wavelet Operator on Besov Spaces

YANG Zhu-yuan[1], YANG Zong-wen[2], LIU Yong-ping[3]
(1. School of Mathematics and Computer Science, Yunnan Nationalities University, Kunming 650031, China;
2. Department of Mathematics, Yunnan University, Kunming 650031, China;
3. Department of Mathematics, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

Abstract: The approximation degree of Sobolev spaces by wavelet operator and the control estimation of K-function are given firstly; and then the approximation of wavelet operator on Besov spaces is given.

Key words: Besov space; wavelet transformation; equivalent theorem

1 多尺度分析及其逼近性质

Besov空间是一个很重要的函数空间,关于它有很多等价刻画[1~5]. 论文给出小波算子对 Besov空间的一个逼近和刻画。

我们知道,所谓 $L_2(R^d)$ 的二进多尺度分析是指 $L_2(R^d)$ 的一个递增的闭子空间序列 $V = \{V_j\}_{j\in Z}$,它们满足如下性质:

(1) $\cup_{j\in Z} V_j$ 在 $L_2(R^d)$ 中稠密且 $\cap_{j\in Z} V_j = \{0\}$.

(2) $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$.

(3) $\forall f \in V_0, f_\gamma = f(x-\gamma) \in V_0, \gamma \in Z^d$.

(4) 存在两个正常数 $C_2 \geq C_1 > 0$ 及函数 $g \in V_0$ 满足 $V_0 = \overline{span\{g_\gamma\}_{\gamma\in Z^d}}$ 且

$$C_1 \sum_{\gamma\in Z^d} |a_\gamma|^2 \leq \left\| \sum_{\gamma\in Z^d} a_\gamma g(\cdot - \gamma) \right\|^2 \leq C_2 \sum_{\gamma\in Z^d} |a_\gamma|^2$$

通常 $\{g_\gamma(x) = g(x-\gamma), \gamma \in Z^d\}$ 称为 V_0 的 Riesz基, g 称为尺度函数.

(5) 存在 $\phi \in V_0$ 使 $\{\phi_\gamma\}_{\gamma\in Z^d}$ 构成 V_0 的正交基.

$L_2(R^d)$ 的多尺度分析 $\{V_j\}_{j\in Z}$ 称为是 r-正则的,若 (4) 中的尺度函数 g(x) 满足

$$|D^\alpha g(x)| \leq C_m (1+|x|^{-m}), \forall m \in N, |\alpha| \leq r,$$

其中 $D^\alpha = (\partial/\partial_{x1})^{\alpha_1}\cdots(\partial/\partial x_d)^{\alpha_d}, \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d), |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$.

下面的几个命题引自文献 [6]:

命题 1 设 $\{V_j\}_{j\in Z}$ 是 $L_2(R^d)$ 中的多尺度分析, 则存在二常数 $c_2 \geq c_1 > 0$ 满足: $c_1 \leq (\sum_{k\in Z^d} |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2)^{1/2} \leq c_2$. 利用 Fourier变换定义 $\phi \in L_2(R^d)$: $\hat{\phi}(\xi) = \hat{g}(\xi)(\sum_{k\in Z^d} |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2)^{-1/2}$,则 $\{\phi(x -$

收稿日期: 2006-04-29. 基金项目: 云南省教育厅基金资助项目 (项目编号: 03Z533D); 国家自然科学基金资助项目 (项目编号: 10471010); 北京师范大学"985项目"; 国家民委科研基金资助项目 (项目编号: 05YN06).

第一作者简介: 杨柱元 (1964-),男,博士,副教授. 主要研究方向: 逼近论. E-mail: yangzhuyuan@sina.com

$k)\}_{k\in Z^d}$ 是 V_0 的正交基.

命题 2　(a) 若 $|g(x)|\le C_m(1+|x|)^{-m}$, $\forall m\in N$, 则 $(\sum_{k\in Z^d}|\hat g(\xi+2k\pi)|^2)^{1/2}$ 是一个无穷可微函数.

(b) 若 $\{V_j\}_{j\in Z}$ 是 $L_2(R^d)$ 的 r-正则多尺度分析, 则由 $\hat\phi(\xi)=\hat g(\xi)(\sum_{k\in Z^d}|\hat g(\xi+2k\pi)|^2)^{-1/2}$ 定义的 $\phi\in V_0$ 满足

$$|D^\alpha\phi(x)|\le C_m(1+|x|^{-m}),\ \forall m\in N,\ |\alpha|\le r.$$

命题 3　设 ϕ 如命题 1, 则对 $S(x)=\sum\alpha_k\phi(x-k)$, 存在二正常数 $c''>c'>0$ 满足 $c'\|S\|_p\le(\sum|\alpha_k|^p)^{1/p}\le c''\|S\|_p$, $1\le p\le\infty$.

Bernstein不等式: 若 $\{V_j\}_{j\in Z}$ 是 $L_2(R^d)$ 的 r-正则多尺度分析, 则

对任意 $S\in V_j(p)$, $j\in Z$, $1\le p\le\infty$, 成立 $\|D^\alpha S\|_p\le C2^{|\alpha|j}\|S\|_p$, $(|\alpha|\le r)$, 其中 $f(2^jx)\in V_j(p)\Leftrightarrow f(x)\in V_0(p)\Leftrightarrow f(x)=\sum\alpha(k)\phi(x-k)$, $(\{\alpha(k)\}\in l_p(Z^d))$.

命题 4　$\{V_j\}_{j\in Z}$ 是 $L_2(R^d)$ 的 r-正则多尺度分析, $E_j: L_2(R^d)\to V_j$ 是正交投影算子, 则对任意次数不高于 $r-1$ 的多项式 P 成立精确重构, 即 $E_j(P)=P$.

如命题 1, 设 $\{\phi(x-k)\}_{k\in Z^d}$ 是 V_0 的正交基, 则从 $L_2(R^d)$ 到 V_j 的正交投影算子 E_j 由下式给出:

$$E_j(f,x)=2^{dj}\int_{R^d}K(2^jx,2^jy)f(y)\,dy,$$

其中 $K(x,y)=\sum_{k\in Z^d}\phi(x-k)\phi(y-k)$

由命题 2, 我们有 $|D_x^\alpha D_y^\beta K(x,y)|\le\dfrac{C_m}{1+|x-y|^m}$, $\forall m\in N$, $|\alpha|\le r$, $|\beta|\le r$.

E_j 可写为 $E_j(f,x)=\sum_{k\in Z^d}\alpha(j,k)\phi(2^jx-k)$, 其中 $\alpha(j,k)=2^{dj}\int_{R^d}f(y)\phi(2^jy-k)\,dy$.

由 $\alpha(j,k)=2^{dj}\int_{R^d}f(x)\phi(2^jx-k)\,dx$, 我们得到

$$\alpha(j,k)|\le\|\phi\|_1^{1/q}\left(\int_{R^d}f(x)|^p|\phi(2^jx-k)|\,dx\right)^{1/p}.$$

由 $C(\phi)=\sup_{2^jx\in R^d}\sum|\phi(2^jx-k)|=\sup_{2^jx\in R^d}\sum|\phi(x-k)|<\infty$, 我们有

命题 5　$(\sum_{k\in Z^d}|\alpha(j,k)|^p)^{1/p}\le|C(\phi)|^{1/p}\|\phi\|_1^{1/q}\|f\|_p$, $\forall f\in L_p(R^d)$.

对于 $1\le p\le+\infty$, R^d 上的 p-幂可积函数空间记为 $L_p(R^d)$ $(1\le p<+\infty)$, $L_\infty(R^d)$ 表示本性有界的函数空间, 它们的范数分别为 $\|f\|_p=(\int_{R^d}f(t)|\,dt)^{1/p}$, $1\le p<\infty$; $\|f\|_\infty=esssup_{t\in R^d}|f(t)|$.

记 $W_p^r(R^d):=\{f\in L_p(R^d): D^\alpha f\in L_p(R^d),\ |\alpha|\le r\in N\}$.

对于 $f\in L_p(R^d)$, $1\le p,\theta\le+\infty$, $r>\gamma>0$, 定义 $B_{p\theta}^\gamma(R^d):=\{f: \|f\|\}_B<+\infty$, 其中 $\|f\|_B=\|f\|B_{p\theta}^\gamma=\|f\|_p+\|f\|_{b_{p\theta}^\gamma}$, $\|f\|_{b_{p\theta}^\gamma}=\{\int_0^{+\infty}[t^{-\gamma}K_r(f,t)_p]^\theta\frac{dt}{t}\}^{1/\theta}$ $(1\le p<+\infty,)$ 而 $\|f\|_{b_{p\infty}^\gamma}=\sup_{t>0}\dfrac{K_r(f,t)_p}{t^\gamma}$, $K_r(f,t)_p=\inf\{\|f-g\|_p+t^r\|g\|_{r,p}: g\in W_p^r(R^d)\}$, $\|g\|_{r,p}=\sum_{|\alpha|=r}\|D^\alpha g\|_p$.

定理 1: 若 $f\in W_p^r(R^d)$, 则 $\|f-E_j(f)\|_p\le C_12^{-jr}\|f\|_{r,p}$.

证明: 令 $P(\cdot):=P(x,\cdot)$ 是 $f(\cdot)$ 在 x 的 $r-1$ 阶 Taylor多项式, 则 $P(x,x)=f(x)$.

由命题 4, E_j 对多项式精确重构, 暂固定 $x\in R^d$, 则

$$\begin{aligned}|E_j(f,x)-f(x)|&=|E_j(f-P,x)|\\&=|2^{dj}\int_{R^d}K(2^jx,2^jy)[f(y)-P(x,y)]\,dy\\&=|\int_{R^d}K(2^jx,y)[f(y)-P(x,2^{-j}y)]\,dy|\end{aligned}$$

利用广义 Minkowski不等式, 对 $m>r+d$, 我们有

$$\|f-E_j(f)\|_p=\|\int_{R^d}K(2^j\cdot,y)[f(y)-P(\cdot,2^{-j}y)]\mathrm{d}y\|_p\le$$
$$C\|\int_{R^d}(1+|2^j\cdot-y|)^{-m}[f(2^{-j}y)-P(\cdot,2^{-j}y)]\mathrm{d}y\|_p=$$
$$C\|\int_{R^d}(1+|u|)^{-m}f(\cdot-2^{-j}u)-P(\cdot,\cdot-2^{-j}u)\mathrm{d}u\|_p\le$$
$$C\int_{R^d}(1+|u|)^{-m}\|f(\cdot-2^{-j}u)-P(\cdot,\cdot-2^{-j}u)\|_p\mathrm{d}u=$$
$$C\int_{R^d}(1+|u|)^{-m}\|\sum_{|\alpha|=r}\frac{2^{-jr}u^\alpha}{\alpha!}\int_0^1 s^{r-1}D^\alpha f(\cdot-2^ju+s2^{-j}u)\mathrm{d}s\|_p\mathrm{d}u\le$$
$$C\int_{R^d}(1+|u|)^{-m}\|\sum_{|\alpha|=r}\|\frac{2^{-jr}u^r}{\alpha!}\int_0^1 s^{r-1}D^\alpha f(\cdot-2^ju+s2^{-j}u)\mathrm{d}s\|_p\mathrm{d}u\le$$
$$C'2^{-jr}\int_{R^d}(1+|u|)^{-m}|u|^r\sum_{|\alpha|=r}\|\int_0^1 s^{r-1}D^\alpha f(\cdot-2^ju+s2^{-j}u)\mathrm{d}s\|_p\mathrm{d}u\le$$
$$C'2^{-jr}\int_{R^d}(1+|u|)^{-m}|u|^r\sum_{|\alpha|=r}\int_0^1 s^{r-1}\|D^\alpha f(\cdot-2^ju+s2^{-j}u)\|_p\mathrm{d}s\mathrm{d}u\le$$
$$C''2^{-jr}\sum_{|\alpha|=r}\|D^\alpha f\|_p.$$

由命题3和5我们知道E_j是映L_p到$V_j(p)$的有界线性算子,从而我们有

推论 若$f\in L_p(R^d)$,则$\|f-E_j(f)\|_p\le c_3K_r(f,2^{-j})$.

2 小波算子的逼近等价定理

引理1 (Hardy不等式[7]):设$a=(a_k),b=(b_k),k\in Z$是二正序列满足对某$c>0,\mu>0$有$|b_k|\le c(\sum_{j=k}^{\infty}|a_j|^\mu)^{1/\mu}$或$|b_k|\le c2^{-k\lambda}[\sum_{j=0}^{k}(2^{j\lambda}|a_j|)^\mu]^{1/\mu}$.

则对$\lambda>\gamma>0,\theta>0$, $(\sum_{j=0}^{\infty}[2^{j\gamma}|a_j|]^\theta)^{1/\theta}\le C(\sum_{j=0}^{\infty}[2^{j\gamma}|b_j|]^\theta)^{1/\theta}$

引理2: $K_r(f,2^{-N})_p\le C_r\cdot 2^{-Nr}\{\sum_{j=0}^{N}[(2^{jr}\|f-E_j(f)\|_p)^\mu]^{1/\mu}+\|f\|_p\},(\mu\le 1)$.

证明: $K_r(f,2^{-N})_p\le\|f-E_N(f)\|_p+2^{-Nr}\|E_N(f)\|_{r,p}\le$

$$\|f-E_N(f)\|_p+2^{-Nr}[\sum_{j=1}^{N}\|E_j(f)-E_{j-1}(f)\|_{r,p}+\|E_0(f)\|_{r,p}]\le$$
$$\|f-E_N(f)\|_p+2^{-Nr}[\sum_{j=0}^{N}2^{jr}\|E_j(f)-E_{(j-1)}(f)\|_p+\|E_0(f)\|_p]\le$$
$$\|f-E_N(f)\|_p+2\cdot 2^{-Nr}[\sum_{j=0}^{N}2^{jr}\|f-E_j(f)\|_p+\|E_0(f)\|_p]\le$$
$$2\cdot 2^{-Nr}[\sum_{j=0}^{N}2^{jr}\|f-E_j(f)\|_p+c\|f\|_p]\le$$
$$C_r\cdot 2^{-Nr}\{\sum_{j=0}^{N}[(2^{jr}\|f-E_j(f)\|_p)^\mu]^{1/\mu}+\|f\|_p\}.$$

定理2 **设**$1\le p,\theta\le\infty,0<\gamma,f\in L_p(R^d)$,**则**

$$f\in B^\gamma_{p\theta}(R^d)\Leftrightarrow[\sum_{j=0}^{\infty}(2^{j\gamma}\|f-E_j(f)\|_p)^\theta]^{1/\theta}<\infty.$$

证明:**注意到** $\int_0^\infty[t^{-\gamma}K_r(f,t)_p]^\theta\frac{\mathrm{d}t}{t}<\infty\Leftrightarrow\int_0^1[t^{-\gamma}K_r(f,t)_p]^\theta\frac{\mathrm{d}t}{t}<\infty\Leftrightarrow$

$$\ln 2\int_0^\infty[2^{u\gamma}K_r(f,2^{-u})_p]^\theta\mathrm{d}u<\infty\Leftrightarrow\sum_{j=0}^{\infty}[2^{j\gamma}K_r(f,2^{-j})_p]^\theta<\infty.$$

定理的必要性由定理1的推论1可得,而充分性由引理2和引理1可得.

小波算子$Q_j=E_{j+1}-E_j$**恰好是映**$L_2(R^d)$**到小波空间**$W_j=V_j\ominus V_{j+1}$**的正交投影算子. 我们注意到在**$L_p(R^d)$**尺度下**

$$f - E_k(f) = \sum_{j=k+1}^{\infty}(E_j(f) - E_{j-1}(f)),\text{且} \ \|f - E_k(f)\|_p \le \left(\sum_{j=k+1}^{\infty}\|E_j(f) - E_{j-1}(f)\|_p^{\mu}\right)^{1/\mu},\ (\mu \le 1).$$

利用 Hardy不等式,我们获得了 Besov空间的小波刻画:

推论 2　设 $1 \le p, \theta \le \infty, 0 < \gamma < r, f \in L_p(R^d)$, 则

$$f \in B_{p\theta}^{\gamma}(R^d) \Leftrightarrow \left[\sum_{j=0}^{\infty}(2^{j\gamma}\|Q_j(f)\|_p)^{\theta}\right]^{1/\theta} < \infty.$$

参考文献:

[1] 杨柱元, 刘永平. Cardinal样条逼近 [J]. 北京师范大学学报:自然科学版, 2001, 37(5): 592 - 595.

[2] 杨柱元, 刘永平. 多元 Cardinal样条逼近 [J]. 北京师范大学学报:自然科学版, 2006, 42(3): 221 - 223.

[3] 杨柱元, 刘永平. Lipschitz空间的 Cardinal样条逼近 [J]. 云南大学学报:自然科学版, 2006, 28(4): 281 - 284.

[4] 杨柱元, 刘永平. Cardinal - Hermite插值逼近 [J]. 云南大学学报:自然科学版, 2006, 28(5): 374 - 377.

[5] 杨宗文,杨柱元. 空备代数正规类的根与右理想 [J]. 昆明理工大学学报:理工版, 2006, 31(3): 112 - 116.

[6] MEYER Y, COFMAN R. 小波与算子 [M]. 邓东皋, 龙瑞麟译. 北京: 世界图书出版公司, 1992: 29 - 89.

[7] DEVORE V, POPOV A. Interpolation of Besov Spaces [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1988, 305(1): 397 - 414.

(上接第 115页)

参考文献:

[1] 刘淑平. 学习国际经验优化物流管理 [J]. 物流科技, 2006, 132(29): 131 - 132.

[2] 何运福. 国际视野中的绿色物流发展及对策 [J]. 河南广播电视大学学报, 2006, 19(3): 20 - 21.

[3] 李辉民. 集成化创新物流管理 [J]. 中外物流, 2006, 8: 79 - 81.

[4] 刘晖. 加强武钢物流管理的思考 [J]. 企业管理, 2006, 4,

[5] 范义民. 加强物流管理提升企业核心竞争力 [J]. 科技情报开发与经济, 2006, 16(16): 190 - 191.

[6] 郭庆祝,宋采乐. 绿色物流:一种新的物流管理趋势 [J]. 现代物流, 2005, 5: 52 - 53.

[7] 鞠涛. 绿色物流理论及其发展探讨 [J]. 商务论坛, 2006, 5: 46 - 47.

[8] 陈静. 绿色物流与现代物流管理思考 [J]. 商场现代化, 2006, 464(4): 2.

[9] 薛鹏,张悟移. 我国库存水平分析及对策 [J]. 昆明理工大学学报:理工版, 2006, 31(2): 114 - 117.