

Fuzzy 幂群的同态与同构

杨培亮

(昆明理工大学 理学院, 云南 昆明 650093)

摘要: 文[1]首先提出了Fuzzy幂群的概念, 讨论了Fuzzy幂群的结构及其同态问题. 本文更进一步讨论了Fuzzy幂群的同态与同构问题.

关键词: Fuzzy 幂群; 一致Fuzzy 幂群; 正则Fuzzy 幂群; 同态; 同构

中图分类号: O159

文献标识码: A

文章编号: 1007-855X(2001)02-096-05

0 引言

设 \mathcal{A} 是群 X 上的Fuzzy幂群, E 是 \mathcal{A} 的单位元. \tilde{E} 是 X 上的Fuzzy子半群, 若把Fuzzy幂群的单位元的条件逐渐加强, 从 X 的Fuzzy子半群加强到 X 的Fuzzy独异点, Fuzzy子群和正规Fuzzy子群, 则Fuzzy幂群相应变为 X 的正则Fuzzy幂群, 一致Fuzzy幂群和Fuzzy商群, 所以本文对文[1]中的一致Fuzzy幂群重新作了等价定义, 并且对Fuzzy幂群的同态与同构作了较深入的研究, 把幂群的同态与同构定理推广到了Fuzzy幂群上.

1 预备知识

本文假定 X 是一个群, X 上的全体模糊子集组成的集合叫做模糊幂集, 记作 $\mathcal{F}(X)$ 由多元扩展原理^[2], 群 X 中的乘法运算可扩展到 $\mathcal{F}(X)$ 中,

$$\forall \tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{F}(X), \quad \tilde{A}\tilde{B} = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda(A_\lambda B_\lambda) \quad (1.1)$$

若Fuzzy集合类 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}(X)$, 对运算(1.1)作成群, 则称 \mathcal{A} 为 X 上的一个Fuzzy幂群, 其单位元用 \tilde{E} 表示.

命题 1.1^[1] 设 $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{F}(X)$, 则 $\tilde{A}\tilde{B}$ 的隶属函数为

$$\tilde{A}\tilde{B}(x) = \bigvee_{\substack{yz=x \\ y,z \in X}} \{ \tilde{A}(y) \wedge \tilde{B}(z) \} = \bigvee_{y \in X} (\tilde{A}(y) \wedge \tilde{B}(y^{-1}x)), \forall x \in X$$

命题 1.2^[1] 设 $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{F}(X)$, 则 $\tilde{A}\tilde{B} = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda(A_\lambda B_\lambda)$, 其中 A_λ 为 \tilde{A} 的 λ -强截集.

命题 1.3^[1] 设 $\tilde{A} = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda H_A(\lambda), \tilde{B} = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda H_B(\lambda)$, 其中 H_A, H_B 均为 X 上的集合套^[2],

$A_\lambda \subseteq H_A(\lambda) \subseteq A_\lambda, B_\lambda \subseteq H_B(\lambda) \subseteq B_\lambda, \forall \lambda \in [0,1]$, 则

$$\tilde{A}\tilde{B} = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda(H_A(\lambda)H_B(\lambda)), (\tilde{A}\tilde{B})_\lambda = \bigcap_{a < \lambda} H_A(a)H_B(a), (\tilde{A}\tilde{B})_\lambda = \bigcup_{a > \lambda} H_A(a)H_B(a) = A_\lambda B_\lambda$$

命题 1.4^[1] 对任意 $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C} \in \mathcal{F}(X)$, $(\tilde{A}\tilde{B})\tilde{C} = \tilde{A}(\tilde{B}\tilde{C})$.

下面我们总假定 \mathcal{A} 是 X 上的Fuzzy幂群.

文[1]给出了如下的几个结论:

1) 几个重要定义

定义 1.1 设 $\tilde{A} \in \mathcal{F}(X), \forall \lambda \in [0,1], A_\lambda$ 均为 X 的独异点(子半群、子群), 则称 \tilde{A} 为 X 上的Fuzzy独

收稿日期: 2000-10-10;

作者简介: 杨培亮(1976.3~), 女, 硕士; 主要研究方向: 模糊数学.

异点 (Fuzzy 子半群、Fuzzy 子群).

定义 1.2 设 \tilde{E} 是 X 的 Fuzzy 子群 (Fuzzy 独异点), A 是 X 的子群, \tilde{E} 称作关于 A 的伪正规 Fuzzy 子群 (伪正规 Fuzzy 子半群), 如果

$$\forall a \in A, \forall \lambda \in [0,1], aE_\lambda = E_\lambda a$$

定义 1.3 若 \mathcal{A} 的单位元 \tilde{E} 是 X 上的 Fuzzy 独异点 (Fuzzy 子群), 则称 \mathcal{A} 为 X 上的正则 Fuzzy 幂群 (一致 Fuzzy 幂群).

定义 1.4 设 \tilde{A} 为 X 上的 Fuzzy 集, \tilde{A} 的高定义为: $\text{high } \tilde{A} = \bigvee_{x \in X} \tilde{A}(x)$.

定义 1.5 设 \mathcal{A} 为 X 上的 Fuzzy 幂群, 对 $\tilde{A} \in \mathcal{A}$.

① 若 $\bigvee_{x \in X} \tilde{A}(x) = \max_{x \in X} \tilde{A}(x)$, 则称 \tilde{A} 为 \mathcal{A} 的一个达高元.

② 若 \mathcal{A} 中任意元均为达高元, 则称 \mathcal{A} 为达高 Fuzzy 幂群.

定义 1.6 称 \mathcal{A} 为条件强达高的, 如果 \mathcal{A} 满足: $\forall \tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{A}$, 若 $\tilde{A}\tilde{B}$ 在 x 处达高, 则存在 $x_1, x_2 \in X$, $x_1 x_2 = x$, 使 \tilde{A} 在 x_1 处高且 \tilde{B} 在 x_2 处在高.

2) 两个结构定理

记 $X^* = \bigcup_{\tilde{A} \in \mathcal{A}} \tilde{A}$, h 为 \mathcal{A} 的高, 设 \mathcal{A} 为一致 Fuzzy 子半群, 若 \mathcal{A} 达高, 则 X^* 是 X 的子群, \tilde{E} 是关于 X^* 的伪正规 Fuzzy 子半群, 且 $\mathcal{A} = X^* | \tilde{E}$.

记 $\bar{X} = \bigcup \{ \tilde{A}_h | \tilde{A} \in \mathcal{A} \}$, 其中 $\tilde{A}_h = \{ a \in \tilde{A}_h | a^{-1} \in \tilde{A}_h \}$, h 为 \mathcal{A} 的高, 设 \mathcal{A} 为正则 Fuzzy 幂群, 若 \mathcal{A} 是条件强达高的, 则 \bar{X} 是 X 的子群, \tilde{E} 是关于 \bar{X} 的伪正规 Fuzzy 子半群, 且 $\mathcal{A} = \bar{X} | \tilde{E}$.

3) 两个构造定理

若 \tilde{E} 为关于 A 的伪正规 Fuzzy 子群, 则 $A | \tilde{E} \triangleq \{ a\tilde{E} | a \in A \}$ 是 X 上的一致 Fuzzy 幂群, 单位元恰为 \tilde{E} .

若 \tilde{E} 为关于 A 的伪正则 Fuzzy 子半群, 则 $A | \tilde{E} \triangleq \{ a\tilde{E} | a \in A \}$ 为 X 上的正则 Fuzzy 幂群, 单位元恰为 \tilde{E} .

2 Fuzzy 幂群中的同态与同构

定理 2.1^[1] 设 f 是群 X 到群 Y 的同态映射, \mathcal{A} 是 X 上的 Fuzzy 幂群, 记 $\mathcal{B} \triangleq f(\mathcal{A}) \triangleq \{ f(\tilde{A}) | \tilde{A} \in \mathcal{A} \}$, 则 \mathcal{B} 是 Y 上的 Fuzzy 幂群, $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ 且

- 1) 若 \mathcal{A} 是一致的, 则 \mathcal{B} 也是一致的.
- 2) 若 \mathcal{A} 是正则的, 则 \mathcal{B} 也是正则的.
- 3) \mathcal{A} 与 \mathcal{B} 是等高的.
- 4) 若 \mathcal{A} 达高, 则 \mathcal{B} 也达高.

定理 2.2^[1] 设 f 是群 X 到群 Y 的满同态, \mathcal{B} 为 Y 上的 Fuzzy 幂群, 记 $\mathcal{A} \triangleq f^{-1}(\mathcal{B}) \triangleq \{ f^{-1}(\tilde{B}) | \tilde{B} \in \mathcal{B} \}$, 则 \mathcal{A} 是 X 上的 Fuzzy 幂群, $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ 且

- 1) 若 \mathcal{B} 是一致的, 则 \mathcal{A} 也是一致的.
- 2) 若 \mathcal{B} 是正则的, 则 \mathcal{A} 也是正则的.
- 3) \mathcal{B} 与 \mathcal{A} 是等高的.

4) 若 \mathcal{B} 达高, 则 \mathcal{A} 也达高.

定理 2.3 (同态基本定理) 群 X 的任意群 Fuzzy 商群 $X|\underline{H}$ 都是 X 的同态象; 反之, 若 Fuzzy 商群 X' 是 X 的同态象, 则 X' 与 X 关于该同态核所成的商群同构.

证明 $\forall x \in X$, 令 $\phi: X \rightarrow X|\underline{H}, x \rightarrow x\underline{H}$, 则易证 ϕ 是 X 到 $X|\underline{H}$ 的同态满射.

反之, 若 f 是 X 到 Fuzzy 商群 X' 的同态满射, N 是同态核, 令 $\psi: aN \rightarrow f(a)$, 则 ψ 为 $X|N$ 到 X' 的同态满射.

因为 $aN = bN \Rightarrow b^{-1}a \in N \Rightarrow f(b^{-1})f(a) = (f(b))^{-1}f(a) = \underline{E}$

故 $f(a) = f(b)$

又 $\forall b \in X'$, 由于 f 是满同态, $\exists a \in X$, 使 $f(a) = b$, 故有 $aN \in X|N$, 使 $\psi(aN) = f(a) = b$, 以所 ψ 是满射.

$$\psi(aNbN) = \psi(abN) = f(ab) = \psi(bN)$$

所以 ψ 是同构映射: $X|N \cong X'$

定理 2.4 如果 \mathcal{A} 是 X 上的达高一一致 Fuzzy 幂群, h 为 \mathcal{A} 的高, 则映射 $\psi: X^* \rightarrow X^*|\underline{E}, \psi(a) = a\underline{E}$ 是满同态, 并且它的核为 E_h , 即 $Ker \psi = E_h$.

证明: $\forall a \in Ker \psi$, 即 $a\underline{E} = \underline{E}$,

对 $\forall \lambda < h, a\underline{E} = \underline{E} \Rightarrow (a\underline{E})_\lambda = E_\lambda \Rightarrow aE_\lambda = E_\lambda \Rightarrow a \in \bigcap_{\lambda < h} E_\lambda = E_h \Rightarrow a \in E_h$, 故 $Ker \psi \subseteq E_h$.

对 $\forall a \in E_h, \forall \lambda < h, a \in E_\lambda \Rightarrow aE_\lambda = E_\lambda$, 对 $\lambda \geq h, E_\lambda = \phi \Rightarrow aE_\lambda = \phi$, 故 $aE_\lambda = E_\lambda$, 而 $\underline{E} = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda E_\lambda =$

$\bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda(aE_\lambda) = a\underline{E}$, 因此 $a \in Ker \psi, E_h \subseteq Ker \psi$.

综上所述得 $Ker \psi = E_h$.

定理 2.5 设 f 是 X 到群 X' 的满同态, 若 $X^*|\underline{E}'$ 是 X' 上的达高一一致 Fuzzy 幂群, 记 $\underline{E} \underline{\Delta} f^{-1}(\underline{E}')$, $X^* \underline{\Delta} f^{-1}(X^*)$, 则 $X^*|\underline{E}$ 是 X 上的达高一一致 Fuzzy 幂群, 且 $X^*|\underline{E} \cong X^*|\underline{E}'$.

证明: 令 $g = f|_{X^*}$, 由于 f 是满射, $g(f^{-1}(X^*)) = X^*$, 所以 g 是 X^* 到 X^* 的满同态映射, 又由于 X^* 是 X' 的子群, \underline{E}' 是 X^* 的伪正规 Fuzzy 子群, 所以 X^* 是 X 的子群, \underline{E} 是 X^* 的伪正规 Fuzzy 子群, $X^*|\underline{E}$ 是 X 上的一致 Fuzzy 幂群.

设 $f(x) = y$, 令 $g: x\underline{E} \rightarrow y\underline{E}'$, 下证 g 是一一映射.

若 $x_1\underline{E} \neq x_2\underline{E}$, 则 $\underline{E}(x_1^{-1}x_2) \neq \underline{E}(e)$, 由 $\underline{E} = f^{-1}(\underline{E}')$ 知, $\underline{E}(x_1^{-1}x_2) = (f^{-1}(\underline{E}'))(x_1^{-1}x_2) = \underline{E}'(f^{-1}(x_1^{-1}x_2)) = \underline{E}'(y_1^{-1}y_2) \neq \underline{E}'(f(e))$, 因此 $y_1\underline{E}' \neq y_2\underline{E}'$, g 是一一映射.

$g(x_1\underline{E}x_2\underline{E}) = g(x_1x_2\underline{E}) = y_1y_2\underline{E}' = y_1y_2\underline{E}'\underline{E}' = y_1\underline{E}'y_2\underline{E}' = g(x_1\underline{E})g(x_2\underline{E})$, 故 g 是同构映射, $X^*|\underline{E} \cong X^*|\underline{E}', X^*|\underline{E}$ 是 X 上的达高一一致 Fuzzy 幂群.

定理 2.6 设 f 是群 X 到群 X' 的满同态, 若 $X^*|\underline{E}$ 是 X 的达高一一致 Fuzzy 幂群, 记 $f(\underline{E}) \underline{\Delta} \underline{E}', f(X^*) \underline{\Delta} X^*$,

则 $X^* | \underline{E}$ 是 X' 上的达高一一致 Fuzzy 幂群, 且 $\forall \lambda \in [0,1], Kerf \subseteq E_\lambda$ 时, $X^* | \underline{E} \cong X^* | \underline{E}'$.

证明: 因为 $f^{-1}(X^*) = f^{-1}(f(X^*)) \supseteq X^*$, 因此, 如果我们能证明 $f^{-1}(X^*) \subseteq X^*, f^{-1}(\underline{E}') = \underline{E}$, 根据定理 2.5, $X^* | \underline{E} \cong X^* | \underline{E}'$, $\forall a \in f^{-1}(X^*) = f^{-1}(f(X^*)) \Rightarrow f(a) \in f(X^*) \Rightarrow \exists b \in X^*, f(a) = f(b) = f(e)f(b) \Rightarrow f(a)f(b)^{-1} = f(ab)^{-1} = f(e) \Rightarrow ab^{-1} \in Kerf \Rightarrow \exists b' \in E_\lambda, ab^{-1} = b' \Rightarrow a = b'b \in E_\lambda X^* \subseteq X^*$.

故 $f^{-1}(X^*) \subseteq X^*$, 所以 $f^{-1}(X^*) = X^*$.

$$\forall a \in f^{-1}(E') \lambda = f^{-1}(E'_\lambda) f^{-1}(f(E_\lambda))$$

$$\text{同理可证 } f^{-1}(f(E_\lambda)) = E_\lambda, \underline{E} = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda E_\lambda = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f^{-1}(E'_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f^{-1}(E')_\lambda = f^{-1}(\underline{E}')$$

故 $X^* | \underline{E} \cong X^* | \underline{E}', X^* | \underline{E}$ 是 X' 上的达高一一致 Fuzzy 幂群.

引理 1 设 \mathcal{A} 是 X 上的正则 Fuzzy 幂群, 若 \mathcal{A} 是条件强达高的, h 为 \mathcal{A} 的高, 则映射 $\Psi: \bar{X} \rightarrow \mathcal{A}, a \rightarrow aE$ 是满同态, 并且它的核为 \bar{E}_h , 即 $Ker\Psi = \bar{E}_h$.

证明: $\forall a \in Ker\Psi$, 即 $\Psi(a) = aE = \underline{E}, \forall \lambda < h, aE = \underline{E} \Rightarrow aE_\lambda = E_\lambda \Rightarrow a \in E_\lambda \Rightarrow a \in \bigcap_{\lambda < h} E_\lambda = E_h$, 由于 $a \in E_\lambda, e \in E_\lambda$, 及 $aE_\lambda = E_\lambda$, 存在 $b \in E_\lambda$, 使 $e = ab$, 从而 $b = a^{-1}, a^{-1} \in \bigcap_{\lambda < h} E_\lambda = E_h$, 故 $a \in \bar{E}_h, Ker\Psi \subseteq \bar{E}_h$.

$$\forall a \in \bar{E}_h, a \in E_h, a^{-1} \in E_h, \forall \lambda < h, a \in E_\lambda, \text{从而 } aE_\lambda = E_\lambda, \text{对 } \lambda \geq h, E_\lambda = \phi, aE_\lambda = \phi \text{ 故有 } aE_\lambda = E_\lambda, \underline{E} =$$

$$\bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda E_\lambda = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda aE_\lambda = aE, \text{故 } a \in Ker\Psi, \bar{E}_h \subseteq Ker\Psi.$$

综合以上所述得 $Ker\Psi = \bar{E}_h$.

引理 2 若 \mathcal{A} 是 X 上的条件强达高的正则 Fuzzy 幂群, h 为 \mathcal{A} 的高, 则 \bar{E}_h 是 \bar{X} 的正规子群.

定理 2.7 设 $\mathcal{A} = \bar{X} | \underline{E}$ 是 X 上的条件强达高的正则 Fuzzy 幂群, 则它必对应着一个商群 $\bar{\mathcal{A}} = \bar{X} | \bar{E}_h$, 它们在映射

$$\Psi: \mathcal{A} \rightarrow \bar{\mathcal{A}}, aE \rightarrow \bar{E}_h$$

之下同构.

下面将定理 2.5 和定理 2.6 推广到正则 Fuzzy 幂群上.

定理 2.8 设 f 是 X 到 X' 的满同态, 若 $\bar{X}' | \underline{E}'$ 是 X' 上的条件强达高的正则 Fuzzy 幂群, 记 $\underline{E} = f^{-1}(\underline{E}')$, $X = f^{-1}(\bar{X}')$ 则 $\bar{X} | \underline{E} \cong \bar{X}' | \underline{E}'$.

证明: 因为 \bar{X}' 是 X' 的子群, \underline{E}' 是 \bar{X}' 的伪正规 Fuzzy 子半群, $X | \underline{E}$ 是 X 上的正则 Fuzzy 幂群.

$$\text{根据定理 2.7 } \bar{X}' | \underline{E}' \cong \bar{X}' | \underline{E}'_h, \bar{X} | \underline{E} \cong \bar{X} | \underline{E}_h.$$

$$\text{下证 } f^{-1}(\bar{E}'_h) = \bar{E}_h.$$

$$\forall a \in \bar{E}'_h, \text{即 } a \in E_h, a^{-1} \in E_h, a, \text{由 } \underline{E} = f^{-1}(\underline{E}') \text{ 知, } h = \underline{E}(a) = f^{-1}(\underline{E}')(a) = \underline{E}'(f(a)), \text{故 } a \in$$

$f^{-1}(E'_h)$.

同理 $a^{-1} \in f^{-1}(\bar{E}'_h)$, 故 $a \in f^{-1}(\bar{E}'_h)$, $f^{-1}(\bar{E}'_h) \supseteq \bar{E}_h$, $\forall a \in f^{-1}(\bar{E}'_h)$, $f(a) \in \bar{E}_h$, 即 $f(a) \in E'_h$,

$(f(a))^{-1} \in E'_h$ 知 $\tilde{E}'(f(a)) = \tilde{E}(a) = h$, $\tilde{E}(f(a)^{-1}) = \tilde{E}(a^{-1}) = h$, $a \in E_h$, $a^{-1} \in E_h$,

故 $a \in \bar{E}_h$, $\bar{E}_h \supseteq f^{-1}(\bar{E}'_h)$.

综上所述得 $f^{-1}(\bar{E}'_h) = \bar{E}_h$.

故 $\bar{X}' | \bar{E}'_h \cong \bar{X} | \bar{E}_h$, $\bar{X} | \bar{E} \cong \bar{X}' | \bar{E}'$.

定理2.9 设 f 是 X 到群 X' 的满同态, 若 $\bar{X} | \bar{E}$ 是 X 上的条件强达高的正则 Fuzzy 幂群, 记 $f(\bar{E}) = \bar{E}'$,

$f(\bar{X}) = \bar{X}'$, 则 $\bar{X}' | \bar{E}'$ 是 X' 上正则 Fuzzy 幂群, 且 $\forall \lambda \in [0, 1]$, $\text{Ker} f \subseteq E_\lambda$ 时, $\bar{X} | \bar{E} \cong \bar{X}' | \bar{E}'$.

证明: 同理于定理 2.6.

参考文献:

- [1] 罗承忠, 米洪海. Fuzzy 幂群. 模糊系统与数学, 1994, (1): 1~9.
- [2] 罗承忠. 模糊集引论. 北京: 北京师范大学出版社, 1989. 1~30.
- [3] 李洪兴, 汪培庄. 幂群. 应用数学, 1988, (1): 1~4.
- [4] 张振良. 各种幂群的结构与同态同构关系. 昆明理工大学学报, 1998, (2): 92~99.
- [5] 张振良, 李洪兴, 汪培庄. 正规超群与商群的关系. 数学报刊, 1987, (3): 42~45.
- [6] 李洪兴. 正则 HX 的同态与同构. 模糊系统与数学, 1990, (1): 1~7.
- [7] 钟育彬. Fuzzy 幂群的基数定理. 模糊系统与数学, 1998, (2): 61~69.

The Homomorphisms and Isomorphisms of Fuzzy Power Group

YANG Pei-liang

(The Faculty of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, China)

Abstract: In the paper [1], the concept of fuzzy power group has been raised firstly and the structure and homomorphism of fuzzy power group has been considered in the paper, We will consider the homomorphisms and isomorphisms of fuzzy power group.

Key words: fuzzy power group; uniform fuzzy power group; normal fuzzy power group; homomorphism; isomorphism