

# Gabor 和 Chirplet 字典中的子空间匹配追踪算法对比

周忠根, 孔令华

(江西师范大学 数学与信息科学学院, 江西 南昌 330022)

**摘要:** 对比了 Gabor 和 Chirplet 字典中的时频原子, 研究了 Chirplet 时频字典中的子空间匹配追踪算法. 该算法由时频分布确定 chirp 原子的时频中心, 然后在时频中心保持不变的条件下搜索原子的尺度和调频率. 同 Gabor 字典中的标准匹配追踪算法、子空间匹配追踪算法相比, Chirplet 字典中的子空间匹配追踪算法对信号的逼近所需原子数更少, 对实测语音信号的数值计算证实了这一点.

**关键词:** Gabor 字典; Chirplet 字典; 匹配追踪; 最小二乘法; 信号分解

**中图分类号:** TN 911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-855X(2010)03-0089-04

## Comparison of Subspace Matching Pursuit Algorithm in Gabor and Chirplet Dictionaries

ZHOU Zhong-gen, KONG Ling-hua

(College of Mathematics & Information Science, Jiangxi Normal University, Nanchang 330022, China)

**Abstract** Based on the comparison of TF atoms in the Gabor and Chirplet dictionaries, the subspace matching pursuit algorithm in the Chirplet dictionary is researched in this paper. In the algorithm, the time-frequency centers of the chirp atoms are determined by the pilot TF distribution and then the scale factor and chirp rate is estimated under the precondition of keeping time-frequency center unchangeable. Compared with the matching pursuit and subspace matching pursuit in the Gabor dictionary, the proposed algorithm requires less TF atoms to approximate a signal, which is verified by the numerical results of real speech signals.

**Key words** Gabor dictionary; Chirplet dictionary; matching pursuit; least square algorithm; signal decomposition

### 0 引言

Fourier 变换是信号分解中常用的方法, 但由于 Fourier 变换没有时域分辨能力, 用 Fourier 基展开一个非平稳信号时, 信号的局部成分在 Fourier 展开系数中很难找到明显的对应. 1993 年, Mallat 和 Zhang<sup>[1]</sup>提出的匹配追踪算法 (MP) 较好地解决了此问题, 它是一种典型的“贪婪”算法, 每步寻找和剩余信号最匹配的原子. 匹配追踪算法收敛速度非常缓慢, 其中原因之一是存在过匹配现象. 过匹配引入了不希望的人工分量, 追踪和补偿这些分量需要付出大量的计算, 高分辨匹配追踪<sup>[2]</sup>在某种程度上克服了这一缺点. 另外, 文献 [1] 也采用了共轭原子对构成的二维子空间对信号进行追踪, 提高了追踪算法的收敛速度. 为了克服过匹配现象, 文献 [3] 提出了子空间匹配追踪算法, 它的主要思想是: 在每次迭代中, 用多个时频原子张成的子空间代替单个原子, 并且用信号或残差信号在子空间上的正交投影逼近信号或残差信号. 由于每次迭代时, 选取了多个最匹配的时频原子, 可以有效减小过匹配现象出现的概率. 用子空间上的正交投影逼近信号使得残差能量下降速度加快, 并且正交投影可以通过最小二乘算法得到, 计算复杂度增加不大.

收稿日期: 2009-07-10 基金项目: 国家自然科学基金 (10901074), 江西省自然科学基金 (2008GQ50054).

作者简介: 周忠根 (1971-) 男, 在读博士, 讲师. 主要研究方向: 时频分析及其在信号处理中的应用.

E-mail: zhouzgen@yahoo.com.cn

这两点改进使得子空间匹配追踪算法收敛速度比标准匹配追踪快得多. 然而她们采用的是由时移、频移和尺度因子确定的三参数波形库, 其波形库是由 Gauss 信号产生的三参数时频原子 (Gaussian 原子) 组成的, 它不能有效地表示时变信号, 相比较而言由四参数 Chiplet 原子组成的波形库更能有效地表示时变信号<sup>[4]</sup>. 因此, 本文讨论了 Chiplet 时频字典中的子空间匹配追踪算法, 该算法通过时频分布确定 chip 原子的时频中心, 然后在时频中心保持不变的条件下搜索原子的尺度和调频率 (chip rate). 这种方法把四参数追踪变成两个两参数追踪问题.

### 1 Chiplet 与 Gabor 时频字典及其离散化

波形库常常由所讨论的函数空间或信号空间的一个超完备 (Over-complete) 子集构成. 波形库的参数结构和各参数的物理意义是信号表示、信号解释的基础. 目前, 常用的波形库有: 由时移、频移确定的双参数波形库, 由时移、频移和尺度因子确定的三参数波形库, 以及由时移、频移、尺度因子和调频率确定的四参数波形库<sup>[1, 2]</sup>. 它们依次对应到 Gabor 变换 (短时 Fourier 变换)、变窗 Fourier 变换和 Chiplet 变换. 在这些函数库上, 相应的信号自适应展开近来也取得了重要的进展<sup>[5-8]</sup>. 为了增加时频原子的时频方向多样性, 1999 年 Bultan<sup>[9]</sup> 提出将尺度、旋转、时移和频移算子作用于单位能量高斯函数, 得到四参数的时频 chip 原子, 这些原子参数的离散化构成了由 chip 原子组成的 Chiplet 时频字典. chiplet 变换<sup>[10]</sup>的 chip 原子定义为:

$$g_v(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{s}} g\left(\frac{t-u}{s}\right) \exp\left[j\left(\zeta(t-u) + \frac{c}{2}(t-u)^2\right)\right] \tag{1}$$

这里  $\gamma = (s, u, \zeta, c) \in \Omega$  且  $u, \zeta, c$  是实数,  $s$  是正实数,  $g(t)$  一般选用标准的 Gauss 函数. 常用的离散参数形式如下:

$$s_p = a^p, u_i = ia^p \Delta u, \zeta_m = ma^{-p} \Delta \zeta, c_l = la^{-2p} \Delta c, (p, i, m, l) \in Z^4 \tag{2}$$

当  $c = 0$  时, 波形库简化成三参数的波形库<sup>[7]</sup>, 由此便得到了 Gabor 时频字典. 这时的时频原子为 Gaussian 原子<sup>[4]</sup>:

$$g_v(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{s}} g\left(\frac{t-u}{s}\right) \exp\{j\zeta(t-u)\} \tag{3}$$

这里  $\gamma = (s, u, \zeta) \in \Omega$  且  $u, \zeta$  是实数,  $s$  是正实数, 它的离散参数形式如下:

$$s_p = a^p, u_i = ia^p \Delta u, \zeta_m = ma^{-p} \Delta \zeta, (p, i, m) \in Z^3 \tag{4}$$

Gaussian 原子和 chip 原子的 WVD 分布图可参见文献 [4].

### 2 Chiplet 时频字典中的子空间匹配追踪算法

由于四维参数 chip 原子经离散化后, 波形库的原子数目非常巨大, 标准匹配追踪算法通过搜索整个波形库的内积来确定参数, 其计算量非常巨大. 例如, 假设每个参数离散化成 1000 个点, 波形库原子数目就是  $10^{12}$  个, 搜索原子时的计算代价几乎无法承受. 为了克服上述缺点, 常用的方法是通过降维处理, 通过双两维搜索代替直接的四维搜索. 它的基本思想是: 首先, 对信号进行时频分析, 计算信号的时频分布; 其次, 利用已有的时频分布在时频平面上搜索匹配原子的时频中心, 确定原子的前两个参数  $(i, m)$ ; 最后, 匹配原子的时频中心固定不变, 在 Chiplet 时频字典中搜索原子的后两个参数  $(p, l)$ . 这样四参数的搜索问题就转化为两次两参数搜索问题. 算法的详细步骤描述如下.

Chiplet 时频字典中的子空间匹配追踪算法:

步骤 1 信号初始化: 假设信号的长度为  $N$ , 对实信号  $x(n)$  解析化, 得到复解析信号  $f(n)$  (如果信号本身是复的, 则  $f(n) = x(n)$ ). 设  $R^0 f(n) = f(n)$ , 每次迭代时从时频分布中挑选出  $Q$  个原子, 并且令  $k = Q$  要求的逼近误差为  $\epsilon > 0$

步骤 2 计算信号的时频分布: 计算信号或残差信号  $R^k f(n)$  的时频分布  $\theta(n, k)$ , 它描述了残差信号的时频能量分布.

步骤 3 从时频分布中搜索  $Q$  个时频原子: 这一步是整个算法的关键, 由  $Q$  次迭代构成, 共搜索出  $Q$  个匹配原子.

(a) 设  $\theta_0(n, k) = \theta(n, k)$ ,  $q = 1$  搜索匹配原子的时频中心

$$(i_q, m_q) = \underset{(n, k)}{\operatorname{argm\,ax}} \theta_q(n, k) \tag{5}$$

(b) 在 Chirplet 时频字典中搜索时频原子的尺度参数  $p_q$  和调频率参数  $l_q$

$$(p_q, l_q) = \underset{(p, l)}{\operatorname{argm\,ax}} \left\{ \sum_k R^k f(n) g^*(i_q, m_q, p, l)(n) \right\} \tag{6}$$

如果  $q = Q$ , 转入步骤 4 否则, 进入步骤 (c), 修正时频分布.

(c) 修正时频分布:

$$\theta_{q+1}(n, k) = \theta_q(n, k) - \theta_{i_q, m_q, p_q, l_q}(n, k) \tag{7}$$

令  $q = q + 1$  返回步骤 (a), 搜索下一个匹配原子.

经过步骤 3 我们得到了  $Q$  个匹配原子

$$\{g_{v_q^{(k)}}(n), v_q^{(k)} = \{i_q, m_q, p_q, l_q\}, q = 1, 2, \dots, Q\} \tag{8}$$

步骤 4 计算信号或残差信号在子空间的正交投影: (8) 式选出的匹配原子相互之间往往不是正交的, 它们张成一个子空间  $V_k$ ,  $R^k f(n)$  在子空间的正交投影  $P_{V_k} f(n)$  可以通过最小二乘法计算出:

$$(c_1^{(k)}, c_2^{(k)}, \dots, c_Q^{(k)}) = \underset{c_q}{\operatorname{argm\,in}} \left\{ \left\| R^k f(n) - \sum_{q=1}^Q c_q g_{v_q^{(k)}}(n) \right\|_2^2 \right\} \tag{9}$$

逼近残差为:

$$R^{k+1} f(n) = R^k f(n) - P_{V_k} f(n) = R^k f(n) - \sum_{q=1}^Q c_q^{(k)} g_{v_q^{(k)}}(n) \tag{10}$$

如果  $\|R^{k+1} f(n)\|_2^2 > \varepsilon \|f(n)\|_2^2$  返回步骤 2

如果  $\|R^{k+1} f(n)\|_2^2 \leq \varepsilon \|f(n)\|_2^2$  搜索过程结束, 得到信号的逼近

$$f(n) = \sum_{r=0}^k P_{V_r} f(n) + R^{k+1} f(n) = \sum_{r=0}^k \sum_{q=1}^Q c_q^{(r)} g_{v_q^{(r)}}(n) + R^{k+1} f(n) \tag{11}$$

在上述算法中, 选择何种时频分布是关键. 时频分布的选择要比较精确的描述各信号分量的能量分布. 因此, 时频分布应该含有较少的交叉项干扰. 本文中, 选用了目前交叉项抑制和时频分辨率性能最好的时频分布之一的自适应高斯径向核时频分布<sup>[11]</sup>. 其次, 四参数波形库的逼近能力很强, 因为它比三参数波形库多了一个自由度, 逼近一个信号往往需要的 chirplet 原子数较少. 同时, 从每个引导时频分布中不是一次搜索一个匹配原子, 而是搜索了由多个匹配原子组成的子空间, 从而提高了引导时频分布的利用率. 最后, 子空间匹配追踪可以克服标准匹配追踪的一些缺点 (前面已提及).

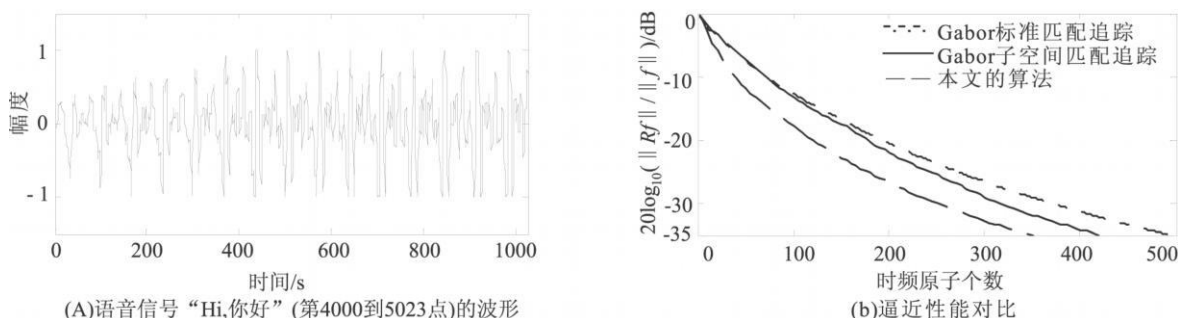


图1 语音信号“Hi, 你好”波形及逼近性能对比  
Fig.1 Speech signal “Hi, hello” waveforms and approximation performance comparison

### 3 数值结果

下面的数值仿真实验中, 考虑了两个实测语音信号并与 Gabor 字典中的标准匹配追踪和子空间匹配追踪作了对比, 算法中的相关参数分别为  $a = \sqrt{2}$ ,  $p = 1, 2, \dots, 12$ ,  $Q = 8$  测试信号 1 是短句‘Hi, 你好’读音

的一个语音片段,另一个是‘BF’读音的一个片段,图 1(a)和图 2(a)分别是它们的波形.图 1(b)和图 2(b)分别是提出的方法和另外两种方法匹配追踪的性能曲线,图中横坐标表示逼近原子的数目,纵坐标是  $20 \log_{10}(\|R^k f\|_2 / \|f\|_2)$ ,其中  $R^k f$  是前  $k$  个原子的逼近残差,  $f$  是被逼近的信号.对比三种算法可看出,Chiplet字典中的子空间匹配追踪算法随着原子数目的增加,逼近残差的下降速度要快得多.

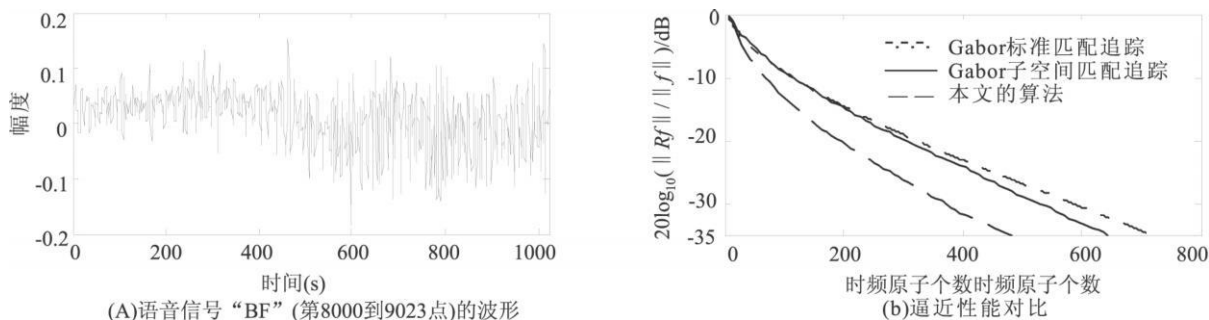


图2 语音信号“BF”波形及逼近性能对比

Fig.2 Speech signal "BF" waveforms and approximation performance comparison

## 4 结论

本文研究了 Chiplet 时频字典中的子空间匹配追踪算法,这种算法的优点是:在时频分布引导下可以精确搜索匹配原子的时频中心.最后,同 Gabor 字典中的标准匹配追踪算法、子空间匹配追踪算法相比,Chiplet 字典中的子空间匹配追踪算法对信号的逼近所需原子数更少,对实测语音信号的数值计算证实了这一点.

## 参考文献:

- [1] Mallat S, Zhang Z. Matching pursuits with time-frequency dictionaries[J]. IEEE Trans Signal Processing 1993, 41(12): 3397-3415.
- [2] Karl W C, Mallat S, Wilksy A S. High Resolution Pursuit for Feature Extraction[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis 1998, 5: 428-449.
- [3] 赵玉娟,水鹏朗.基于子空间匹配追踪的信号稀疏逼近[J].信号处理,2006,22(4):501-505.
- [4] Ghofiani S, McLemon D C, Ayatollahi A. Comparing Gaussian and Chiplet dictionaries for time-frequency analysis using Matching pursuit decomposition[J]. Signal Processing and Information Technology, ISPIIT 2003. Proceedings of the 3rd IEEE International Symposium, 2003, 12: 713-716.
- [5] Qinye Yin, Shie Qian, Aigang Feng. A fast refinement for adaptive Gaussian chiplet decomposition[J]. IEEE Trans Signal Processing 2002, 50(6): 1298-1306.
- [6] Grignonval R. Fast Matching pursuit with a multiscale dictionary of Gaussian Chirps[J]. IEEE Trans Signal Processing 2001, 49(5): 994-1001.
- [7] Suppappola A P, Suppappola S B. Adaptive time-frequency representation for multiple structures[J]. Proceedings of the Tenth IEEE Workshop on Statistical Signal and Array Processing 2000(14-16): 579-583.
- [8] Daubechies J, Panchon F. Adaptive Gabor transform[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis 2002, 13(1): 1-21.
- [9] Bultan A. A four-parameter atomic decomposition of chirplets[J]. IEEE Trans Signal Processing 1999, 47(3): 731-745.
- [10] Mann S, Haykin S. The chirplet transform: Physical considerations[J]. IEEE Trans Signal Processing 1995, 43(11): 2745-2761.
- [11] Jones D J, Baraniuk R G. An adaptive optimal-kernel time-frequency representation[J]. IEEE Trans Signal Processing 1995, 43(10): 2361-2371.