

Genesis-Tesi 系统的自适应同步控制

田现东¹, 卢殿臣²

(1. 临沂师范学院 数学系, 山东 临沂 276005 2 江苏大学 非线性科学研究中心, 江苏 镇江 212013)

摘要: 针对 Genesis-Tesi 系统, 利用耦合法和非线性控制法实现了该系统的自适应同步控制. 通过选取适当的耦合参数, 利用耦合法可以较快地实现该系统的自适应同步; 并给出具体证明过程. 利用非线性控制法通过选取适当的非线性控制项也可以有效地实现该系统的自适应同步控制. 并利用数学软件给出数值模拟, 通过理论分析和数值仿真表明这 2 种方法都可以较快有效地实现混沌同步.

关键词: Genesis 系统; 耦合法; 非线性控制; 混沌同步

中图分类号: O192 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-855X(2007)06-0119-06

Self-Adaptive Synchronization Control of Genesis-Tesi System

TAN Xian-dong¹, LU Dian-chen²

(1. Department of Mathematics of Linyi Normal University, Linyi Shandong 276005 China

2 Center of Nonlinear Science Research, Jiangsu University, Zhenjiang Jiangsu 212013, China)

Abstract Coupling approach and non linear control method are adopted to realize the self-adaptive synchronization control of Genesis-Tesi System. The self-adaptive synchronization can be quickly accomplished by choosing proper coupling parameters. The proving process is also elaborated. It is then argued that the synchronization can also be effectively accomplished by choosing proper non linear controllers. At the same time, simulation is given through mathematical software. The effectiveness of the two methods to realize chaos synchronization is made clear through both theoretical analysis and simulation results.

Key words Genesis system; coupling approach; non linear control method; chaos synchronization

0 引言

自从发现混沌同步现象以来^[1], 人们对各种混沌同步现象的研究产生了浓厚的兴趣. 由于混沌系统具有对初值极其敏感的特性, 即系统的初始条件有一微小差异时 2 个系统的轨道在同一相空间中将会变得毫不相关. 混沌信号的隐蔽性、不可预测性、高复杂性和易于实现等特性都特别适合于通信、工程、经济等领域. 因此混沌同步的研究引起了各领域学者的浓厚兴趣并取得了重大发展. 由此产生了很多混沌同步的方法^[2-10], 这些方法都已成功地应用于混沌同步现象的研究中.

论文针对物理学中的 Genesis-Tesi 系统^[11], 利用耦合法和非线性控制法实现了该系统的自适应同步并给出具体结果.

1 耦合法

1.1 混沌同步准则

考虑如下的混沌系统: $\dot{x} = Ax + g(x) + u$ (1)

收稿日期: 2007-05-16 基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (项目编号: 90210004); 教育部骨干教师基金资助项目 (项目编号: BK20022003).

第一作者简介: 田现东 (1978-), 男, 山东临沂人, 硕士. 主要研究方向: 非线性动力系统.

E-mail: dongyt@163.com

$x \in \mathbb{R}^n$ 是状态变量, $u \in \mathbb{R}^n$ 是输入变量, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是一个常数矩阵, $g(x)$ 是连续的非线性函数.

假定对一有界矩阵 M , $g(x) - g(x_1) = M(x - x_1)$ (2)

M 中的元素仅依赖于 x 和 x_1 . 通过单向线性耦合方法, (1) 的响应系统为

$$x_1 + Ax_1 + g(x_1) + u + K(x - x_1) \tag{3}$$

其中 $K = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n)$, $k_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ 是后来将要讨论的反馈矩阵.

从 (1) 和 (3) 我们可以得到如下的误差系统:

$$e = Ae + g(x) - g(x_1) - K(x - x_1) = (A - K + M)e \tag{4}$$

其中 $e = x - x_1$ 是误差项.

定理 1 如果选择反馈矩阵 K 使得

$$\lambda_i \leq \mu < 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \tag{5}$$

其中 λ_i 是矩阵 $(A - K + M)^T P + P(A - K + M)$ 的特征值, P 为正定对称的常数矩阵, μ 为负常数. 那么动态误差系统 (4) 在 0 点全局指数稳定, 这表明系统 (1) 和 (3) 全局渐近同步.

证明: 构造 Lyapunov 函数 $V = e^T P e$ (6)

P 为正定对称的常数矩阵. V 的导数为:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} = [(A - K + M)e]^T P e + e^T P [(A - K + M)e] \\ &= e^T [(A - K + M)^T P + P(A - K + M)] e = e^T Q e \end{aligned} \tag{7}$$

其中 $Q = (A - K + M)^T P + P(A - K + M)$

由于 $Q = Q^T$, 令 $Q = U^* \Lambda U$, U 为平方酉矩阵, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 那么 (7) 式可写为

$$\dot{V} = e^T Q e = e^T U^* \Lambda U e = e_1^T \Lambda e_1 \leq \mu e_1^T e_1 < 0 \tag{8}$$

其中 $e_1 = U e$ 根据 (8) 式和 Lyapunov 稳定理论, 系统 (4) 在零点全局指数稳定, 也就是系统 (1) 和 (3) 全局渐近同步. 根据矩阵理论的 Gerschgorin 定理可得到如下结果:

定理 2 选择 $P = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_n)$ 令

$$P(A + M) + (A + M)^T P = [\bar{a}_{ij}]; R_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |\bar{a}_{ij}| \tag{9}$$

如果选择适当的反馈矩阵 $K = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n)$ 使得

$$k_i \geq \frac{1}{2p_i} (\bar{a}_{ij} + R_i - \mu), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \tag{10}$$

μ 为负常数, 那么 (5) 式成立, 表明系统 (1) 和 (3) 全局渐近同步.

证明

$$Q = (A - K + M)^T P + P(A - K + M) = (A + M)^T P + P(A + M) - KP - PK(A + M)^T P + P(A + M) - 2KP \tag{11}$$

由矩阵论中的 Gerschgorin 定理可知, 矩阵 Q 的任一特征值都在其盖尔圆内, 即

$$\lambda - \bar{a}_{ij} - 2k_i p_i \leq R_i \text{ 而 } \lambda_i \leq \mu \text{ 即 } \mu \text{ 在 } Q \text{ 的所有盖尔圆外, 故 } \mu - \bar{a}_{ij} - 2k_i p_i \geq R_i \text{ 这样就得到 } k_i \geq \frac{1}{2p_i} (\bar{a}_{ij} + R_i - \mu), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \text{ 定理 2 得证, 特别的令 } P = I \text{ 可得如下推论.}$$

推论 1 如果 $P = I$ 根据定理 1 和定理 2 选取适当的耦合参数可得到如下的代数不等式

$$k_i \geq \frac{1}{2} (\bar{a}_{ij} + R_i - \mu), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \tag{12}$$

1.2 Genesio-Tesi 系统的耦合同步控制

Genesio-Tesi 系统的方程为
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = -cx - by - az + x^2 \end{cases} \tag{13}$$

a, b, c 为 3 个正实数且满足 $ab < c$ 例如当 $a = 1, b = 2, c = 6$ 时该系统发生混沌现象见图 1

选取系统 (13) 为驱动系统, 根据单向线性误差反馈法我们有系统 (13) 的响应系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 k_1 (x - x_1) \\ \dot{y}_1 z_1 + k_2 (y - y_1) \\ \dot{z}_1 = -cx_1 - by_1 - az_1 + x_1^2 + k_3 (z - z_1) \end{cases} \quad (14)$$

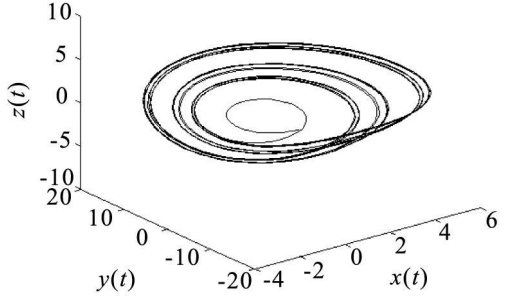


图1 Genesio-Tesi系统的吸引子

Fig.1 The attractor of Genesio-Tesi system

由 (13) 和 (14) 我们有

$$\dot{e} = Ae + g(x) - g(x_1) - Ke \quad (15)$$

其中 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c & -b & -a \end{bmatrix}$ $K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}$ $e = \begin{bmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \\ z - z_1 \end{bmatrix}$ $g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x^2 \end{bmatrix}$ (16)

这样 $g(x) - g(x_1) = Me$ $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ x + \tilde{x} & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (17)

令 $P = I$ 则有 $[\bar{a}_{ij}] = P(A + M) + (A + M)^T P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -c + x + x_1 \\ 1 & 0 & 1 - b \\ -c + x + x_1 & 1 - b & -2a \end{bmatrix}$ (18)

$$\begin{cases} R_1 = \sum_{j=1}^3 |\bar{a}_{1j}| = |\bar{a}_{12}| + |\bar{a}_{13}| = 1 + |-c + x + x_1| \\ R_2 = \sum_{j=1}^3 |\bar{a}_{2j}| = |\bar{a}_{21}| + |\bar{a}_{23}| = 1 + |1 - b| \\ R_3 = \sum_{j=1}^3 |\bar{a}_{3j}| = |\bar{a}_{31}| + |\bar{a}_{32}| = |-c + x + x_1| + |1 - b| \end{cases} \quad (19)$$

我们可选取

$$\begin{cases} k_1 \geq \frac{1}{2}(\bar{a}_{11} + R_1 - \mu) = \frac{1}{2}(1 + |-c + x + x_1| - \mu) \\ k_2 \geq \frac{1}{2}(\bar{a}_{22} + R_2 - \mu) = \frac{1}{2}(1 + |1 - b| - \mu) \\ k_3 \geq \frac{1}{2}(\bar{a}_{33} + R_3 - \mu) = \frac{1}{2}(-2a + |-c + x + x_1| + |1 - b| - \mu) \end{cases} \quad (20)$$

根据定理 2 和推论 1 系统 (13) 和 (14) 全局渐近同步.

2 Genesio-Tesi系统的非线性同步控制

选取系统 (13) 为驱动系统得驱动系统的表达式为:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -cx_1 - bx_2 - ax_3 + x_1^2 \end{cases} \quad (21)$$

构造系统 (21) 的响应系统:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 + u_1(t) \\ \dot{y}_2 y_3 + u_2(t) \\ \dot{y}_3 = -cy_1 - by_2 - ay_3 + y_1^2 + u_3(t) \end{cases} \quad (22)$$

其中 $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ 为状态变量, a, b, c 为参数, 并且当 $a = 1, b = 2, c = 6$ 时存在混沌现象. $U(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))^T$ 为控制项. 目标是确定控制函数 $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$ 使得系统 (21) 和 (22) 实现同步, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y_i - x_i\| = 0 (i = 1, 2, 3)$, 令 $e_i = y_i - x_i$ 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e\| = 0 (i = 1, 2, 3)$.

定理 3 如果选择矩阵 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 则 $V(e) = e^T P e > 0, V(e) < 0$ 此时系统 (3) 和 (4) 实

现同步, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y_i - x_i\| = 0$

证明: 选取 Lyapunov 函数 $V(e) = e^T P e$ 和矩阵 P , 显然 Lyapunov 函数 $V(e)$ 正定, 选取控制器 $U(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))^T$ 如下:

$$\begin{cases} u_1(t) = -y_2 + x_2 - y_1 + x_1 \\ u_2(t) = -y_3 + x_3 - y_2 + x_2 \\ u_3(t) = cy_1 + by_2 - y_1^2 - cx_1 - bx_2 + x_1^2 \end{cases} \quad (23)$$

此时 $V(e)$ 对时间 t 的导数为:

$$\frac{dV(e)}{dt} = e^T \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} e = -e^T P e < 0 \text{ (当且仅当 } e_1 = e_2 = e_3 = 0 \text{ 时 } V(e) = 0 \text{) 即 } \dot{V}(e)$$

负定. 由 Lyapunov 稳定性理论可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y_i - x_i\| = 0$ 此时实现了驱动系统 (21) 与响应系统 (22) 的全局渐进同步.

3 数值仿真

数值仿真中采用步长为 0.001 的四阶 Runge-Kutta 算法, 参数取值为 $a = 1, b = 2, c = 6$ 在耦合合法中令 $(x, y, z) = (2, -3, 1), (x_1, y_1, z_1) = (0, -1, 2), \mu = -0.4$

由 (18) 式有 $\bar{a}_{11} = 0, \bar{a}_{22} = 0, \bar{a}_{33} = -2.4$ 由 (19) 式有 $R_1 = 5, R_2 = 2.92, R_3 = 5.92$

由 (20) 式有 $k_1 \geq 2.7, k_2 \geq 1.66, k_3 \geq 1.96$ (24)

选取耦合参数 $k_1 = 3, k_2 = 2, k_3 = 2$ 则不等式 (24) 成立, 由定理 1 及推论知系统 (13) 和 (14) 全局渐进同步.

图 2 展示了耦合合法中状态变量随时间的演化过程, 由图像知当 $t \geq 3$ 时响应系统已跟踪驱动系统并最终吻合, 误差图像见图 4

在非线性控制中选取初值 $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (2, -3, 1), (y_1(0), y_2(0), y_3(0)) = (0, 0, 3)$, 图 3 展示了非线性控制合法中状态变量随时间的演化过程, 由图像知当 $t \geq 5$ 时响应系统已跟踪驱动系统并最终吻合, 误差图像见图 5

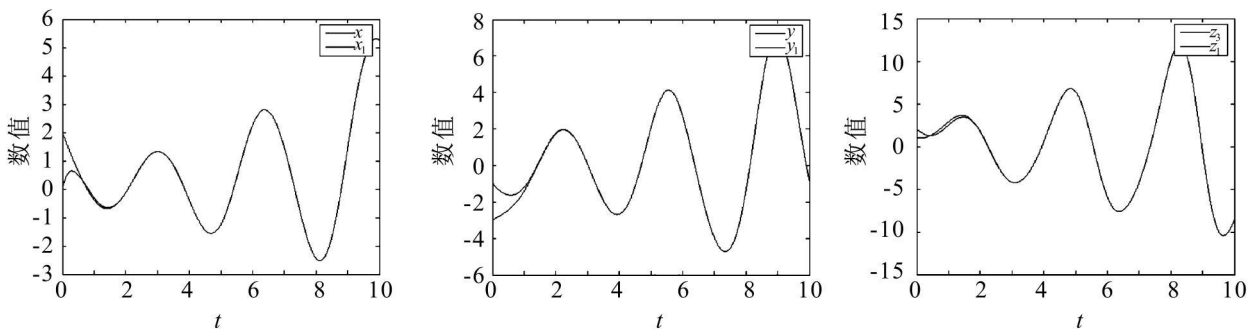


图2 耦合合法中变量轨道

Fig.2 State trajectories via coupling approach

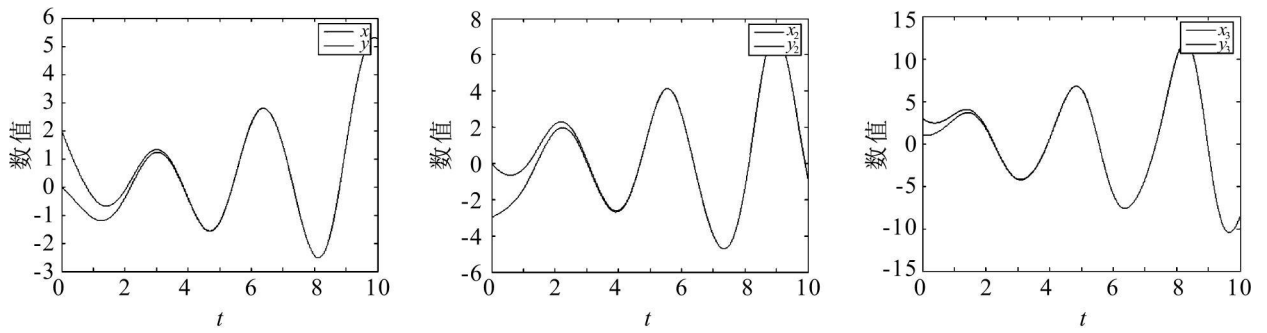


图3 非线性控制法中变量轨道

Fig.3 State trajectories via nonlinear control method

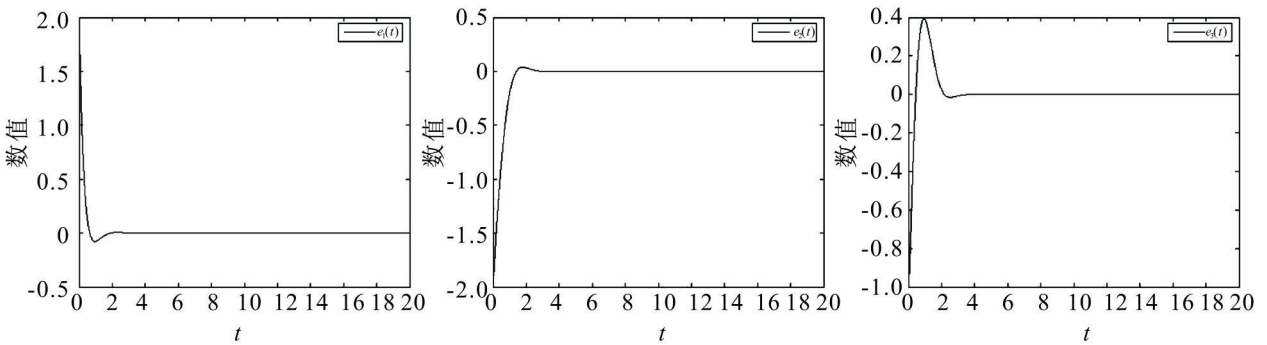


图4 耦合法的误差图像

Fig.4 The image of errors via coupling approach

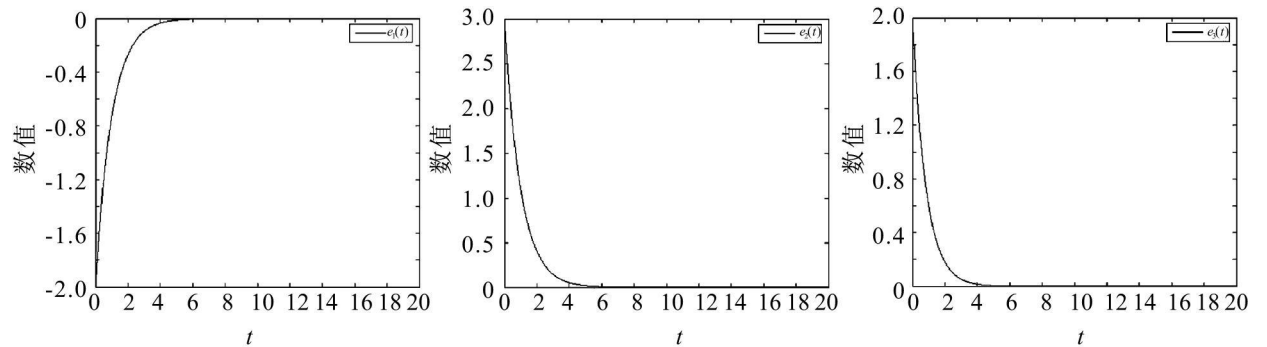


图5 非线性控制法的误差图像

Fig.5 The image of errors via nonlinear control method

4 结 论

本文针对 Genesio-Tesi 系统, 利用耦合法和非线性控制法实现了该系统的自适应同步, 通过选取适当的耦合参数和非线性控制项实现了该系统的同步控制, 并通过数值仿真验证了这两种方法的有效性、适应性。

参考文献:

- [1] Pecora LM, Carroll T L. Synchronization in Chaotic systems[J]. Phys Rev Lett 1990, 64: 1461- 1470
- [2] Lu D C, Wang J X. Global Synchronization for Time- Delay of Windm System[J]. Journal of Jiangsu University(Natural Science Edition), 2005, 26(6A): 79- 81.
- [3] Ott E, Grebogi C, Yorke J A. Controlling Chaos[J]. Phys Rev Lett 1990, 64: 1196- 9

- [4] Wang C C, Su J P. A new Adaptive Structure Control for Chaotic Synchronization and Secure Communication[J]. *Chaos Solitons & Fractals* 2004 20: 967–77
- [5] Park J H. Adaptive Synchronization of a Unified Chaotic Systems with an Uncertain Parameter[J]. *Int J Nonlinear Sci Numer Simul* 2005 6: 201–6
- [6] Park J H, Kwon O M. LMIOptimization Approach of Time-Delay Chaotic Systems[J]. *Chaos Solitons & Fractals* 2005 23: 445–50
- [7] Mohammad H, Acri Amir Abbas Em adzadeh. Comparative Study of Various Methods for Synchronization two Different Chaotic Systems[J]. *Physics Letters A*, 2006 356: 59–64
- [8] Kuznetsov A P, Mosekilde E, Turukina L V. Synchronization in Systems with Bimodal Dynamics[J]. *Physica A*, 2006 371: 280–292
- [9] Thongchai Botmart Piyapong Niamsup. Adaptive Control Synchronization of the Perturbed Chua's System[J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2007, 75: 37–55
- [10] Ren Quansheng, Zhao Jiayue. Impulsive Synchronization of Coupled Chaotic Systems via Adaptive-Feedback Approach[J]. *Physics Letters A*, 2006 355: 342–347
- [11] Genesio R, Tesi A. A Harmonic Balance Method for the Analysis of chaotic Dynamics in Nonlinear Systems[J]. *Automatica* 1992, 28: 531–48

(上接第 107 页)

- [8] Holling C S. The Functional Response of Predators to Prey Density and Its Role in Mimicry and Population regulation[J]. *Mem Ent Soc Can*, 1965 46: 1–60
- [9] Leslie P H, Gower J C. The Properties of a Stochastic Model for the Predator-Prey Type of Interaction Between Two Species[J]. *Biometrika* 1960 47: 219–34
- [10] Li Yibing, Xiao Dongmei. Bifurcations of a Predator-Prey System of Holling and Leslie Types[J]. *Chaos Solitons and Fractals* 2007, 34: 606–620
- [11] Lin Yiping R. Dynamical Behaviors for a Three-Dimensional Differential Equation in Chemical System[J]. *Acta Mathematica Applicatae Sinica* Apr 1996 12: 144–154
- [12] Marsden J E, Cracken M M. The Hopf Bifurcation and Its Applications[M]. Springer-Verlag New York, 1976
- [13] Stephen Wiggins. Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos[M]. Springer-Verlag New York 1976 272–276
- [14] 张明吉, 李庶民. 一类 7 次 Z_2 -一等变平面 Hamilton 系统的极限环分布[J]. *昆明理工大学学报: 理工版*, 2006 31(6): 111–113