第 28 卷 第 4 期　　昆明理工大学学报(理工版)　　Vol. 28 No. 4
2003 年 8 月　　Journal of Kunming University of Science and Technology (Science and Technology)　　Aug. 2003

Hamilton 系统的形式不变性和 Lie 对称性

李兴明[1], 余莉霞[2], 王树勇[3]

(1. 云南交通职业技术学院, 云南 昆明 650101; 2. 昆明理工大学 建筑工程学院, 云南 昆明, 650224;
3. 广东水利电利职业技术学院, 广东 广州 510635)

摘要: 研究 Hamilton 力学系统在相空间的形式不变性及与 Lie 对称性的关系. 首先, 给出了形式不变性和 Lie 对称性的定义和判据; 然后导出形式不变性与 Lie 对称性的关系, 给出形式不变性与 Lie 对称性的结构方程和守恒量, 并举例说明结果的应用.

关键词: 分析力学; Hamilton 系统; 形式不变性; Lie 对称性

中图分类号: O315　　文献标识码: A　　文章编号: 1007- 855X(2003)04- 0090- 04

Form Invariance and Lie Symmetry of Hamilton Systems

LI Xing-ming[1], YU Li-xia[2], WANG Shu-yong[3]

(1. Yunnan College of Vocational Education of Traffic, Kunming 650101, China;
2. Faculty of Architectural Engineering, Kunming University of Science and Techn ology, Kunming 650224, China;
3. Guangdong College of Vocational Education of Water Conservancy and Electricity, Guangzhou 510635, China)

Abstract: The relationship between the form invariance and Lie symmetry of Hamilton systems in phase space is studied. First, the definitions, criterions of the form invariable and Lie symmetry of the systems are given. Next, the relationship between them is deduced. The structure equation and conserved quantity of the form invariance and Lie symmetry of Hamilton systems are provided. Finally, an example is given to illustrate the application of the results.

Key words: analytical mechanics; Hamilton Systems; form invariance; Lie symmetry

1 Hamilton 系统在相空间的形式不变性

对称性原理是物理学中更高层次的法则. 力学系统的守恒量(或第一积分)问题, 不仅在数学上有重要意义, 而且反映深刻的物理本质. 对称性与守恒量之间有潜在的关系, 寻求守恒量的近代方法, 主要有 Noether 对称性与 Lie 对称性[1, 2].

形式不变是一种系统运动方程在无限小变换下的一种不变性. 这种不变性不同于 Noether 对称性和 Lie 对称性. 形式不变性在一定条件下也可导致守恒量. 文[3~ 6] 分别研究了 Lagrange 系统、Appell 方程、Nielsen 方程〗以及一般完整系统的形式不变性; 本文主要研究 Hamilton 系统在相空间正则方程的形式不变性及与 Lie 对称性的关系.

研究由 N 个质点组成的 Lagrange 力学系统. 设系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s (s = 1, \cdots, n)$ 来确定. 系统的运动微分方程有形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0 \qquad (s = 1, \cdots, n), \tag{1}$$

其中 $L = T - V$ 为系统的 Lagrange 函数, T 为系统的功能, V 为势能, 引入广义动量 p_s 和 Hamilton 函数 H

$$p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}, H = \sum_{s=1}^{n} p_s \dot{q}_s - L \qquad (s = 1, \cdots, n), \tag{2}$$

则方程(1) 可表为正则形式

收稿日期: 2002- 10- 17.

第一作者简介: 李兴明(1957~), 男, 副教授; 主要研究方向: 分析力学.

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s}, \quad (s = 1, \cdots, n), \tag{3}$$

在相空间中, 引进无限小单参数变换群

$$t^* = t + \varepsilon\eta_0(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}), q_s^* = q_s + \varepsilon\xi_s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}), p_s^* = p_s + \varepsilon\zeta_s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}), \tag{4}$$

其无限小生成元向量

$$X^{(0)} = \eta_0\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n}\xi_k\frac{\partial}{\partial q_k} + \sum_{k=1}^{n}\zeta_k\frac{\partial}{\partial p_k} \tag{5}$$

和它的一次扩展

$$X^{(1)} = X^{(0)} + \sum_{k=1}^{n}(\dot{\xi}_k - \dot{q}_k\dot{\eta}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{k=1}^{n}(\dot{\zeta}_k - \dot{p}_k - \dot{\eta}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{p}_k} \tag{6}$$

其中 ε 为无限小参数, η_0, ξ_s, ζ_s 为无限小生成元.

假设在无限小变换(4) 下, Hamilton 函数 H 成为 $H^* = H(t^*, \boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{p}^*)$, 则

$$H^* = H + \varepsilon X^{(0)}(H) + O(\varepsilon^2) \tag{7}$$

定义 1　若 Hamilton 正则方程(3) 在无限小变换下形式保持不变, 即

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H^*}{\partial p_s}, \dot{p}_s = -\frac{\partial H^*}{\partial q_s} \quad (s = 1, \cdots, n), \tag{8}$$

则这种不变性称为 Hamilton 系统在相空间中的形式不变性.

考虑到式(3), (7), 我们有如下命题

命题 1　如果无限小生成元 η_0, ξ_s, ζ_s 满足

$$\frac{\partial X^{(0)}(H)}{\partial p_s} = 0, \frac{\partial X^{(0)}(H)}{\partial q_s} = 0 \quad (s = 1, \cdots, n), \tag{9}$$

则系统在相空间中是形式不变的.

证明　由式(7) 有

$$\frac{\partial H^*}{\partial p_s} = \frac{\partial H}{\partial p_s} + \varepsilon\frac{\partial X^{(0)}(H)}{\partial p_s} + O(\varepsilon^2), \frac{\partial H^*}{\partial q_s} = \frac{\partial H}{\partial q_s} + \varepsilon\frac{\partial X^{(0)}(H)}{\partial q_s} + O(\varepsilon^2)$$

将式(3) 和(9) 代入上式, 并忽略 ε^2 及以上高阶小项, 可得式(8), 证毕.

命题 2　如果无限小生成元向量使

$$X^{(0)}(H) = f(t) \tag{10}$$

则系统在相空间中是形式不变的.

命题 2 实际上是命题 1 的推论.

2 系统在相空间中的 Lie 对称性

Lie 方法的基本思想是使系统运动微分方程在无限小变换下保持不变.

定义 2　如果 Hamilton 系统正则方程(3) 在无限小变换(4) 下保持不变, 即

$$X^{(1)}(\dot{q}_s - \frac{\partial H}{\partial p_s}) = 0, X^{(1)}(\dot{p}_s + \frac{\partial H}{\partial q_s}) = 0 \quad (s = 1, \cdots, n), \tag{11}$$

则这种不变性称为 Hamilton 系数在相空间的 Lie 对称性.

式(11) 归结为

$$\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\eta}_0 = X^{(0)}(\frac{\partial H}{\partial p_s}), \dot{\zeta}_s - \dot{p}_s\dot{\eta}_0 = -X^{(0)}(\frac{\partial H}{\partial q_s}) = 0, \quad (s = 1, \cdots, n), \tag{12}$$

3 系统在相空间中的形式不变性和 Lie 对称性的关系

由定义看出, 形式不变性与 Lie 对称性一般是不同的, 由于

$$\frac{\partial X^{(0)}(H)}{\partial p_s} = X^{(0)}(\frac{\partial H}{\partial p_s}) + \frac{\partial \eta_0}{\partial p_s}\frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \xi_k}{\partial p_s}\frac{\partial H}{\partial q_k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \zeta_k}{\partial p_s}\frac{\partial H}{\partial p_k}$$

$$\frac{\partial X^{(0)}(X)}{\partial q_s} = X^{(0)}(\frac{\partial H}{\partial q_s}) + \frac{\partial \eta_0}{\partial q_s}\frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \xi_k}{\partial q_s}\frac{\partial H}{\partial p_k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \zeta_k}{\partial q_s}\frac{\partial H}{\partial p_k} \quad (s = 1, \cdots, n), \tag{13}$$

我们有如下命题

命题3 Hamilton系统在相空间的形式不变性是Lie对称性的充分必要条件是无限小生成元η_0, ξ_s, ζ_s满足

$$\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\eta}_0 + \frac{\partial\eta_0}{\partial p_s}\frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\xi_k}{\partial p_s}\frac{\partial H}{\partial q_k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\zeta_k}{\partial p_s}\frac{\partial H}{\partial p_k} = 0$$

$$\dot{\zeta}_s - \dot{p}_s\dot{\eta}_0 - \frac{\partial\eta_0}{\partial q_s}\frac{\partial H}{\partial t} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\xi_k}{\partial q_s}\frac{\partial H}{\partial q_k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\zeta_k}{\partial q_s}\frac{\partial H}{\partial p_k} = 0 \qquad (s = 1, \cdots, n), \tag{14}$$

证明 将式(13)代入式(9),并与式(12)比较,则命题3得证.

推论1 如果无限小生成元η_0, ξ_s, ζ_s不显含$\boldsymbol{q}$和$\boldsymbol{p}$,且满足

$$\dot{\xi}_s - \dot{\eta}_0\frac{\partial H}{\partial p_s} = 0,\ \dot{\zeta}_s + \dot{\eta}_0\frac{\partial H}{\partial q_s} = 0, \qquad (s = 1, \cdots, n), \tag{15}$$

则形式不变性就是Lie对称的.

推论2 如果无限小生成元为常数,则Hamilton系统在相空间的形式不变性与Lie对称性等价.

4 形式不变性和Lie对称性的守恒量

形式不变性和Lie对称性不一定导致守恒量,下面的定理给出Hamilton系统在相空间中形式不变性和Lie对称性导致守恒量的条件和守恒量的形式.

定理 对于在相空间中具有形式不变性或Lie对称性的Hamilton系统,如果存在规范函数$G = G(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$满足结构方程

$$-H\dot{\eta}_0 - X^{(0)}(H) + \sum_{s=1}^{n}p_s\dot{\xi}_s + \sum_{s=1}^{n}\dot{q}_s\zeta_s + \dot{G} = 0 \tag{16}$$

则系统存在如下形式的守恒量

$$I = \sum_{s=1}^{n}p_s\xi_s - H\eta_0 + G = \text{const.} \tag{17}$$

证明 将$I = \sum_{s=1}^{n}p_s\xi_s - H\eta_0 + G$对时间求导,考虑到式(3)和(16),有$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0$,故定理成立.

5 算 例

已知二自由度系统的Lagrange函数为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - q_2 \tag{18}$$

试研究系统的形式不变性和Lie对称性及守恒量.

由式(2)知系统的广义动量和Hamilton函数为

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_1} = \dot{q}_1, p_2 = \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_2} = \dot{q}_2, H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + q_2 \tag{19}$$

$$X^{(0)}(H) = \eta_0\frac{\partial H}{\partial t} + \xi_1\frac{\partial H}{\partial q_1} + \xi_2\frac{\partial H}{\partial q_2} + \zeta_1\frac{\partial H}{\partial p_1} + \zeta_2\frac{\partial H}{\partial p_2} = \xi_2 + \zeta_1 p_1 + \zeta_2 p_2 \tag{20}$$

取

$$\eta_0 = C_1, \xi_1 = 1, \xi_2 = 1, \zeta_1 = \frac{1}{p_1}, \zeta_2 = \frac{1}{p_2}, \tag{21}$$

其中C_1为任意常数,则式(9)成立,系统是形式不变的;但式(14)不满足,故系统不是Lie对称的.取规范函数$G = t$,可知满足结构方程(16),由式(17)知系统存在守恒量

$$I = p_1 + p_2 - C_1\left(\frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + q_2\right) + t = \text{const.} \tag{22}$$

若取

$$\eta_0 = 0, \xi_1 = 1, \xi_2 = 0, \zeta_1 = 0, \zeta_2 = 0, \tag{23}$$

(下转第96页)

12℃,这样有效地降低了结构的整体温降(如果在北方地区,由于温差太大,采用普通钢筋砼的V托结构将导致温度次内力过大,而有必要施加预应力);同时在跨中主梁与V托相接处,封闭施工缝的温度亦不得超过15℃,并且全桥对称封闭开成超静定结构.在施工工艺设计中,无论是主梁还是桥面恒载的加载,都有严格的施工工序:首先,对全桥支架进行与上部结构相等重量的支架预压,以消除支架的非弹性变形和不可预见的变形,这对于在河流上现浇的箱梁结构是非常必要的;其次,主梁现浇时根据结构的特点都留有不小于1.5 m宽的湿接头,湿接头采用垂直模板,模板上留有钢筋孔穿过,并采用比主梁标号更高一级的砼封闭接头,桥面恒载的加载次序与主梁相同.

6 与其它类桥梁的比较

为检验V形托架对主弯矩的卸载作用,设计中假设了一种结构与V托进行内力比较:即当截面形式相同、恒载相同、跨径相同的连续梁桥与V托结构的内力相差值是多少,经有限元内力分析得知,仅在恒载作用下,连续梁桥的最大弯矩与V托比较如表3.

表3 连梁与V托之 Mmax 比较

截面号	边跨跨中/kN	中跨跨中/kN	最大负弯矩/kN·m
V托连续刚构	8 966	8 460	11 864
同等跨径连续梁	12 803	16 940	27 661

由表3可见,在同等跨径的V形托架连续刚构和同等跨径的连续梁结构中,由于V托的存在,实际上有效地改善了梁中的内力分布,使中、边跨及负弯矩区的内力值相对接近,这为采用等截面的结构形式成为可能;另外,V托亦有效地减小了负弯矩数值,使采用普通钢筋砼结构成为可能.但有一点,由于V托本身是三角形的全封闭结构,承受着较大的温度内力作用,对于温差较大的地区如果采用普通钢筋砼结构可能不易,而有必要在V托中施工加预应力.

7 结 语

在地方施工的公路桥梁中,由于施工力量所限制,作为设计人员往往避免采用较为复杂的结构,主要是出于对施工安全上的担心,普通钢筋混凝土结构的桥梁施工上易于实现,其受力模式比预应力结构更符合传统的混凝土理论,结构的延性较好.在中等跨度的公路桥梁中使用比应该有一定的优势,上面通过实际工程反映了作者的这一设计理念.

参考文献:

[1] 交通部部颁标准. 公路钢筋混凝土及预应力混凝土桥涵设计规范(JTJ023- 85)[S]. 北京: 人民交通出版社, 1985.
[2] 交通部部颁标准. 公路桥涵施工技术规范(JTJ041- 89) [S]. 北京: 人民交通出版社, 1989.

(上接第92页)

可知系统是形式不变的,由推论2,知系统也是Lie对称的,取规范函数 $G = 0$,系统有如下守恒量

$$I = p_1 = \text{const}.$$

参考文献:

[1] 赵跃宇, 梅凤翔. 力学系统的对称性与守恒量[M]. 北京: 科学出版社, 1999.
[2] 梅凤翔. 李群和李代数对约束力学系统的应用[M]. 北京: 科学出版社, 1999.
[3] MEI FX. Form Invariance of Lagrange System[J]. J of Beijing Institute of Technology, 2000, 9(2): 120~ 124.
[4] MEI FX. Form Invariance of Appell Equations[J]. Chinese Physics, 2001, 10(3): 177~ 180.
[5] WANG SY, MEI FX. On the form Invariance of Nielsen Equations[J]. Chinese Physics 2001, 10(5): 373~ 375.
[6] 梅凤翔. 关于Noether对称性, Lie对称性和形式不变性[J]. 北京理工大学学报, 2001, 21(4): 535~ 536.