第 36 卷 第 2 期　　昆明理工大学学报(自然科学版)　　Vol. 36 No. 2
2011 年 4 月　　Journal of Kunming University of Science and Technology (Natural Science Edition)　　Apr. 2011

doi: 10.3969/j.issn.1007 - 855x.2011.02.014

Hammerstein 变型方程的一类多尺度 Galerkin 方法

李建飞，戴　琳

(昆明理工大学 理学院，云南 昆明 650093)

摘要： 将一类分片多项式小波基应用于求解 Hammerstein 积分方程的变型格式，证明了该格式在 Galerkin 方法下具有 $2r$ 阶收敛速度，其中 $r-1$ 为多项式基函数的次数. 数值模拟得到了与理论一致的结果.

关键词： Hammerstein 积分方程；多尺度方法

中图分类号： O241.83　　**文献标识码：** A　　**文章编号：** 1007 - 855X(2011)02 - 0066 - 05

A Multiscale Galerkin Method for Modified Hammerstein Equations

LI Jian-fei, DAI Lin

(Faculty of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, China)

Abstract: Piecewise polynomials are used as the bases to solve the modified Hammerstein equations. The convergence order $2r$ with Galerkin method, where $r-1$ which is the degree of polynomials, is proven. A numerical example is given to verify the theorem.

Key words: Hammerstein integral equation; multiscale method

0 引 言

形如

$$u(t) - \int_D k(t,s)\psi(s,u(s))\,ds = f(t),\ t \in D \tag{1}$$

的非线性积分方程被称作 Hammerstein 方程，其中 f, k, ψ 是已知函数，u 为未知函数，D 是 $\mathbb{R}^m (m \geq 1)$ 上的闭区域. 该方程是一类非常重要的非线性积分方程，也是非线性泛函中的主要研究对象之一，通常由非线性微分方程的边值问题转化得到.

Atkinson KE 和 Potra F 于 1987 年研究了非线性算子方程的迭代投影方法[1]. 同年，Kumar S 和 Sloan IH 给出了一种变型格式[2]，随后，Kumar S 研究了这种变型格式迭代配置法的超收敛性[3]. 20 世纪 90 年代，Kaneko H 和 Xu Y 讨论了 Hammerstein 方程的迭代 Galerkin 方法[4]. 另外，Han G 对离散配置法结果作 Richardson 外推，提高了解的精度[5]. 随着多尺度方法的出现，Chen Z，Micchelli CA 和 Xu Y 开发了一类分片多项式小波基[6]，用于求解第二类 Fredholm 线性积分方程[7~8]. 本文将这类基结合 Galerkin 方法用于求解 Hammerstein 方程的变型格式.

1 基本理论

在整篇文章中，我们假设方程(1)满足以下条件:

H1. $f \in C(D)$.

收稿日期：2010 - 04 - 29. 基金项目：昆明理工大学校青年基金(20080003 - 21)；云南省教育厅科学研究基金(09Y0080).

作者简介：李建飞(1979 -)，男，硕士，讲师. 主要研究方向：积分方程数值解. **E - mail:** imbiz@163.com

H2. 核 $k(t,s)$ 满足 $\sup_{t\in D}\int_D |k(t,s)|\mathrm{d}s < \infty$,

并且 $$\lim_{t\to t'}\int_D |k(t,\cdot) - k(t',\cdot)|\mathrm{d}s = 0, t, t' \in D$$

H3. 函数 $\psi(s,v)$ 以及它相应于 v 的偏导 $\psi^{(0,1)}(s,v)$ 在 $D\times\mathbb{R}$ 上连续,且对 v 都满足 Lipschtiz 条件.

H4. 对于 $v\in D$, $\psi(s,v)$, $\psi^{(0,1)}(s,v) \in D$.

定义线性算子 $K: L^\infty(D)\to C(D)$ 为

$$Ku(t) := \int_D k(t,s)u(s)\mathrm{d}s,$$

以及连续有界算子 $\psi: C(D)\to C(D)$ 为

$$\Psi u(t) := \psi(t,u(t)),$$

则方程(1) 可以写为

$$u = f + K\Psi u \tag{2}$$

进一步,令

$$\mathcal{T}u := f + K\Psi u$$

则

$$u = \mathcal{T}u \tag{3}$$

若令

$$z(t) = \psi(t,u(t)) \tag{4}$$

则由方程(1) 可以得到

$$u(t) = f(t) + \int_D \kappa(t,s)z(s)\mathrm{d}s,\quad t\in D$$

代入(4) 即得

$$z(t) = \psi(t,f(t)) + \int_D k(t,s)z(s)\mathrm{d}s, t\in D \tag{5}$$

表示为算子形式为

$$z = \Psi(K_z + f) \tag{6}$$

这便是 Kumar S 和 Sloan IH 给出的 Hammerstein 方程变型格式. 我们不加证明给出一个引理.

引理 1[2]　假设 u_0 是方程(2) 的一个几何孤立解(以下简称孤立解),则由 $z_0 := \Psi u_o$ 定义的 z_0 是方程(6) 的一个孤立解; 反之,若 z_0 是方程(6) 的一个孤立解,则由 $u_0 := f + Kz_0$ 定义的 u_0 是方程(2) 的一个孤立解.

该引理保证了变型方程(6) 的解和方程(2) 的解是一一对应的.

令$\mathbb{X}$为一 Banach 空间 K, Ψ: $\mathbb{X}\to\mathbb{X}$. 记$\{\mathbb{X}_n\}$ 为$\mathbb{X}$的一个有限维子空间序列,定义维数为 $d_n := \dim\mathbb{X}_n$. 假设对于任意的 $u\in\mathbb{X}$,存在一个序列$\{u_n\}$, $u_n\in\mathbb{X}_n$,定义正交投影算子 $\mathcal{P}_n$: $\mathbb{X}\to\mathbb{X}_n$,若满足

$$\|\mathcal{P}_n u - u\| \to 0, n\to\infty,$$

则算子方程(2) 得到投影格式

$$u_n - \mathcal{P}_n K\psi u_n = \mathcal{P}_n f, u_n \in \mathbb{X}_n \tag{7}$$

相应地,方程(6) 的投影格式为

$$z_n = P_n\Psi(Kz_n + f). \tag{8}$$

使用 Galerkin 方法求解方程(8),即是求

$$z_n = \sum a_{i,j}w_{i,j} \in \mathbb{X}_n$$

满足非线性系统

$$\sum a_{i,j} < w_{i,j}, w_{i',j'} > = < \Psi(K(\sum w_{i,j}a_{i,j}) + f), w_{i',j'} >, \tag{9}$$

其中 $w_{i,j}$ 是$\mathbb{X}_n$ 空间的一组基,等式(9) 可化为

$$\sum a_{i,j}\int_D w_{i,j}(t)\,w_{i',j'}(t)\,\mathrm{d}t = \int_D \psi\left(t,\sum a_{i,j}\int_D k(t,s)\,w_{i,j}(s)\,\mathrm{d}s + f(t)\right)w_{i',j'}(t)\,\mathrm{d}t \tag{10}$$

为了讨论方程(8)解的性质,我们引用几个结论.

引理2[9] 假设$\mathbb{X}$是一个Banach空间,$\{\mathscr{P}_n\}$是$\mathbb{X}$上的一族有界投影算子,当$n\to\infty$时满足

$$\mathscr{P}_n v\to v.$$

如果算子$K:\mathbb{X}\to\mathbb{X}$是紧算子,那么

$$\| K-\mathscr{P}_n K\| \to 0.$$

对于文献[9]中398-340分析的结果,我们表示成以下定理,以便使用.

定理1 设$\mathbb{X}$是一个Banach空间,$u_0\in\mathbb{X}$是算子方程(3)的一个孤立解,$\{\mathscr{P}_n\}$是$\mathbb{X}$上的一族有界投影算子,当$n\to\infty$时满足$\mathscr{P}_n v\to v$. 假设1不是$\mathscr{T}'(u_0)$的特征值,如果存在一个正整数N和常数$L>0$,使得当$n>N$时

$$\| (I-\mathscr{P}_n\mathscr{T}'(u_0))^{-1}\| < L$$

成立,则算子方程(3)的投影逼近方程$u_0=\mathscr{P}_n\mathscr{T}u_n$在$u_0$的某个领域$B(u_0,\delta)$,$\delta>0$内有唯一解$u_n$.

回到Hammerstein方程的变型格式,令

$$\tilde{\mathscr{T}}z_n := \Psi(Kz_n+f),$$

则

$$z_n=\mathscr{P}_n\tilde{\mathscr{T}}z_n. \tag{11}$$

且$\tilde{\mathscr{T}}$是$L^\infty(D)$上的紧算子[2]. 设$z_0\in L^\infty(D)$是方程(6)的一个孤立解,由引理2及定理1知,投影方程(8)在z_0的某个领域$B(u_0,\delta)$,$\delta>0$内有唯一解z_n. 定义$u_n:=f+Kz_n$,则由引理1知,u_n与z_n是一一对应的.

2 多尺度 *Galerkin* 方法

我们构造不变集上的分片多项式小波基[10].

设D是$\mathbb{R}$上的一个有界闭集,$\mathbb{X}$是完备的度量空间,记$Z_n:=\{0,1,2,\cdots,n-1\}$,定义$\Phi:=\{\phi_e: e\in Z_\mu, \mu>1\}$为一族压缩映射,若$D$满足

$$D=\Phi(D) := \underset{e\in z_\mu}{U}\phi_e(D)$$

则称D是相应于Φ的一个不变集.

我们限定D有非空内部,对任意$e,e'\in Z_\mu$,$e\neq e'$,测度$\mathrm{meas}(\phi_e(D)\cap\phi_e'(D))=0$,$\phi_e^{-1}$存在且连续. 记$\boldsymbol{e}:=(e_0,e_1,\cdots,e_{n-1})\in Z_\mu^n:=Z_\mu\times Z_\mu\times\cdots\times Z_\mu$,$n$次,定义映射

$$\phi_{\boldsymbol{e}}:=\phi_{e0}\circ\phi_{e1}\cdots\circ\phi_{e_{n-1}},$$

其中$\circ$为函数复合运算. 记$D_{n,e}:=\phi_e(D)$,$e\in z_\mu$,设存在两个非零常数$c_-,c_+>0$使得

$$c_-\mu^{-n}\leqslant\max\{d(D_{n,e})\}\leqslant c_+\mu^{-1},$$

其中$d(D_{n,e})$表示集合直径. 令$D_0=D$,则所有$D_{n,e}$组成的集合

$$D_n:=\{D_{n,e}:D_{n,e}=\phi_e(D),e\in Z_\mu\}$$

形成集合E的一个多尺度划分. 令$h=\max\{d(\phi_e[0,1]:e\in Z_\mu^n)\}$,则有

$$h=\mathcal{O}\left(\frac{1}{\mu^n}\right),\quad n\to\infty.$$

假设$\mathbb{X}=L^2(D)$,$\mathbb{X}_n$是定义在D_n上的次数不超过$r-1$的多项式空间,定义保范算子$\mathscr{T}_e:L^2(D)\to L^2(D)$,$e\in Z_\mu$为

$$(\mathscr{T}_e v)(t):=|J_{\phi e}|^{-1/2}v\circ\phi_e^{-1}(t)\,x_{\phi e}(D)$$

其中$\chi_{\phi e}$是集合ϕ_e的特征函数,则$\mathbb{X}_n$可由$\mathbb{X}_0$经递推式

$$\mathbb{X}_n = \oplus^{\perp} \mathscr{T}_e \mathbb{X}_{n-1}$$

生成. 因此，得到的空间序列$\{\mathbb{X}_n\}$具有嵌套结构$\mathbb{X}_{n-1} \subseteq \mathbb{X}_n$.

设$u^{(i)}$为u的i阶广义导数，对于$1 \leqslant p \leqslant \infty$，定义 Sobolev 空间

$$W_p^r(D):=\{u: u^{(i)} \in L^p(D), 0 \leqslant i \leqslant r\},$$

并定义其范数为

$$\|u\|_{W_p^r}:=\begin{cases}\left(\sum_{i=0}^{r}\|u^{(i)}\|_{L_p}^p\right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leqslant p<\infty, \\ \max_{0 \leqslant i \leqslant r}\|u^{(i)}\|_{L^\infty}, p=\infty\end{cases}$$

在此方法下，对方程(6)我们得到以下结论.

定理 2　令$u_0 \in W_\infty^r(D)$是方程(2)的一个孤立解，$z_0 \in W_\infty^r(D)$是方程(6)的一个孤立解，假设 1 不是$\tilde{\mathscr{T}}'(z_0)$的特征值，则对于充分大的$n$，方程(8)在$z_0$的某个领域$B(z_0,\delta)$，$\delta>0$内有唯一解$z_n$，并且由$u_n:=f+Kz_n$定义的解$u_n$与$u_0$有以下关系

$$\|u_n-u_0\|_\infty \leqslant C_1 h^r, C_1>0. \tag{12}$$

特别地，定义函数$k_t(s):=k(t,s)$，若核$k(t,s)$满足$\sup_{t\in(D)}\|k_t\|_{W_\infty^r(D)}<\infty$，则有

$$\|u_n-u_0\|_\infty \leqslant C_2 h^{2r}, C_2>0. \tag{13}$$

证明　逼近解z_n的唯一性在第 1 节基本理论中已经阐明. 由于

$$\begin{aligned} K(z_n-z_0) &= \int_D k(t,s)(z_n-z_0)\,\mathrm{d}s \\ &= \langle k_t, z_n-z_0\rangle, \end{aligned}$$

因此存在一个常数$C_0>0$使得

$$\begin{aligned} \|u_n-u_0\|_\infty &= \|K(z_n-z_0)\|_\infty \\ &\leqslant C_0 \sup_{t\in D}\|k_t\|_\infty \cdot \|z_n-z_0\|_\infty. \end{aligned}$$

由投影方法一般理论[1]，对于$z_0 \in W_\infty^r(D)$有

$$\|z_n-z_0\|_\infty \leqslant Ch^r\|z_0\|_{W_\infty^r(D)}, C>0.$$

且$\sup_{t\in(D)}\|k_t\|_\infty$有界，因此存在常数$C_1>0$使得

$$\|u_n-u_0\|_\infty \leqslant C_1 h^r.$$

由于

$$\langle k_t, z_n-z_0\rangle = \langle k_t-v, z_n-z_0\rangle,$$

其中$v\in\mathbb{X}_n$，因此存在一个常数$C_3>0$，使得

$$\begin{aligned} \|u_n-u_0\|_\infty &= \|K(z_n-z_0)\|_\infty \\ &\leqslant C_3 \sup_{t\in D}\|k_t-v\|_\infty \cdot \|z_n-z_0\|_\infty. \end{aligned}$$

若核$k(t,s)$满足$\sup_{t\in(D)}\|k_t\|_{W_\infty^r(D)}<\infty$，则对核$k(t,s)$的逼近同样具有$r$阶收敛速度，即

$$\|k_t-v\|_\infty \leqslant C_4 h^r\|k_t\|_{W_\infty^r(D)}, C_4>0,$$

因此存在一个常数$C_2>0$，使得

$$\|u_n-u_0\|_\infty \leqslant C_2 h^{2r}$$

证毕.

3 数值算例

考虑 Hammerstein 方程

$$u(t)-\int_0^1 e^{t-s}[u(s)]^2\mathrm{d}s = 2e^t-e^{t+1}, t\in[0,1], \tag{14}$$

它在$C[0,1]$上有一个孤立解$u_0=e^t$. 易证其满足条件 H1 ~ H4. 令$z(t)=(u(t))^2$，得到变型格式

$$z(t)=\left(f(t)+\int_0^1 e^{t-s}z(s)\,\mathrm{d}s\right)^2, t\in[0,1] \tag{15}$$

该方程在 $t\in[0,1]$ 有一个孤立解 $z_0=e^{2t}$.

取 $\mathbb{X}_n$ 为分片线性多项式空间,即 $r-1$ 取为 1,$r=2$,定义不变集 $[0,1]$ 上的一组压缩映射为

$$\begin{cases}\phi_0(t)=\dfrac{t}{2}, t\in[0,1]\\ \phi_1(t)=\dfrac{t+1}{2}, t\in[0,1]\end{cases}$$

并构造空间 $\mathbb{X}_0$ 的标准正交基底

$$w_{0,0}(t)=1, t\in[0,1], w_{0,1}(t)=-\sqrt{3}+2\sqrt{3}t, t\in[0,1]$$

由第2节中介绍的方法可以构造任意层空间 $\mathbb{X}_n$ 的基底. 将方程(15)使用Galerkin方法离散化得到的非线性系统我们采用复化Gauss-Legendre公式求所有积分,并使用修改后的牛顿迭代公式求解非线性系统,最后得到 u_n 在各层空间 $\mathbb{X}_n$ 中的逼近误差及收敛阶,结果见表1.

表1中收敛阶用 $\log_2\dfrac{\|u_0-u_{k,m-1}\|_\infty}{\|u_0-u_{k,m}\|_\infty}$ 来计算.

根据定理2,这里 $r=2$,理论上有 $\|u_0-u_n\|_\infty=\mathcal{O}(h^4)$,我们从表中得知,收敛阶约等于4,这跟定理2结论是完全一致的.

表1 误差及收敛阶

Tab. 1 Errors and convergence orders

n	$\|u_0-u_n\|_\infty$	收敛阶
1	$0.441\,455\,113\,790\,761\times10^{-3}$	
2	$0.274\,107\,544\,587\,930\times10^{-4}$	4.009 452 8
3	$0.171\,046\,532\,367\,629\times10^{-5}$	4.002 281 3
4	$0.106\,862\,241\,468\,585\times10^{-6}$	4.000 564 8
5	$0.667\,822\,989\,888\,401\times10^{-8}$	4.000 142 6
6	$0.417\,364\,057\,197\,979\times10^{-9}$	4.000 087 5

参考文献:

[1] Atkinson K E, Potra F. Projection and Iterated Projection Methods for Nonlinear Integral Equations [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1987, 24: 1352-1373.

[2] Kumar S, Sloan I H. A New Collocation-type Method for Hammerstein Equations [J]. Mathematics of Computation, 1987, 48:585-593.

[3] Kumar S. Superconvergence of a Collocation-type Method for Hammerstein Equations [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1987, 7: 313-325.

[4] Kaneko H, Xu Y. Superconvergence of the Iterated Galerkin Methods for Hammerstein Equations [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1996, 33:1048-1064.

[5] Han G. Exptrapolation of a Discrete Collocation-type Method of Hammerstein Equations [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 1995, 61:73-86.

[6] Chen Z, Micchelli C A, Xu Y. The Petrov-Galerkin Methods for Second Kind Integral Equations II: Multiwavelets Scheme [J]. Advances in Computational Mathematics, 1997, 7:199-233.

[7] Chen Z, Micchelli C A, Xu Y. Discrete Wavelet Petrov-Galerkin Methods [J]. Advances in Computational Mathematics, 2002, 16:1-28.

[8] Chen Z, Micchelli C A, Xu Y. A Multilevel Method for Solving Operator Equations [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2001, 262: 688-699.

[9] Atkinson K E, Han W. Theoretical Numerical Analysis [M]. Springer-Verlag Press, New York, 2001.

[10] Micchelli C A, Xu Y. Using the Matrix Refinement Equation for the Construction of Wavelets on Invariant Sets [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 1994, 1:391-401.