第28卷 第2期　　昆明理工大学学报（理工版）　　Vol.28 No.2
2003年4月　　Journal of Kunming University of Science and Technology (Science and Technology)　　Apr. 2003

$N+M$ 超双曲型偏微分方程的函数论方法

陈秀华
（昆明理工大学 理学院，云南 昆明 650093）

摘要：利用泛复变函数的理论给出了 $n+m$ 超双曲型偏微分方程的一种论述，并在这种论述下，得到了用经典方法无法得到的一类解．

关键词：泛复变函数；超双曲型偏微分方程
中图分类号：O186　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1007－855X(2003)02－0147－04

Function Method For $n+m$ Superhyperbolic Partial Differential Equations

CHEN Xiu-Hua
(Faculty of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, China)

Abstract: By using the theory of Pan－complex function, the statements for n + m superhyperbolic partial differential equations are obtained, and then a kind of solution that wont be got by using classic method is achieved.

Key words: Pan－complex function; superhyperbolic partial differential equations

0 引言

二阶齐次偏微分方程

$$u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+\cdots+u_{x_nx_n}=u_{y_1y_1}+u_{y_2y_2}+\cdots+u_{y_my_m} \tag{1}$$

称为 $n+m$ 超双曲型偏微分方程．经典的方法应用于方程(1)产生巨大的困难，因此，在经典的有关偏微分方程的理论书籍及现有的文献中几乎窥不见它的踪影，本文利用泛复变函数的理论提出了偏微分方程(1)的一种论述．这种做不仅能使我们得到方程(1)的一类解，而且还能看到泛复变函数与偏微分方程之间的某种对应关系．

1 函数理论

1.1 双曲泛复变函数

1.1.1 单双曲泛复变函数

(1) 满足示性方程 $j^2-1=0$ 的非实域元 j 添加到实域 R 上形成形如 $z=x+yj$ 的双曲泛复数，其全体记为 H．H 是一广域，亦是一线性空间，称为 H－空间．

(2) H－空间中有两个基 $1, j$ 和 e_1 和 e_2，它们之间具有如下关系：

$$e_1=\frac{1}{2}(1+j),\ e_2=\frac{1}{2}(1-j) \tag{2}$$

并且 e_1, e_2 是一标准正交基，即

$$e_ie_k=\begin{cases}e_i & k=i\\ 0 & k\neq i\end{cases} \tag{3}$$

(3) 对于这两个基，我们有

$$\begin{aligned}z&=x+yj=\lambda e_1+\mu e_2\\ f(z)&=u+vj=\zeta e_1+\eta e_2\end{aligned} \tag{4}$$

收稿日期：2002－12－14．
作者简介：陈秀华(1962～)，男，讲师；主要研究方向：微分流形．

其中

$$\lambda = x + y, \mu = x - y, \zeta = u + v, \eta = u - v \tag{5}$$

(4) 双曲泛复变函数 $f(z)$ 在某一区域 D 内可导的充要条件是 $\frac{\partial\zeta}{\partial\mu} = 0, \frac{\partial\eta}{\partial\lambda} = 0$ 在此条件下,

$$\zeta = \phi(\lambda), \eta = \varphi(\mu). \text{即} f(z) = \phi(\lambda)e_1 + \varphi(\mu)e_2 \tag{6}$$

并且

$$f'(z) = \phi'(\lambda)e_1 + \varphi'(\mu)e_2 \tag{7}$$

利用基 $1, j$,(6) 式可写成

$$f(z) = \frac{\phi(\lambda) + \varphi(\mu)}{2} + j\frac{\phi(\lambda) - \varphi(\mu)}{2} = \frac{\phi(x+y) + \varphi(x-y)}{2} + j\frac{\phi(x+y) - \varphi(x-y)}{2} \tag{8}$$

(5) 若 $f(z)$ 在区域 D 内具有一阶导数 $f'(z)$,则称 $f(z)$ 在区域 D 内一阶解析;若 $f'(z)$ 有一阶导数 $f''(z)$,则称 $f(z)$ 在区域 D 内二阶解析.

1.1.2 多重双曲泛复变函数

(1) n 重双曲泛复空间定义为

$$H^n_* = H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n = \{(z_1, \cdots, z_n) \mid z_i = x_i + j_i y_i \in H_i \quad i = 1,2,\cdots,n\}$$

其中 $j^2 - 1 = 0$ 为双曲虚单位.

(2) 一个定义在 n 重双曲泛复空间 H^n_* 的某一柱形区域 D_* 上的 n 重双曲泛复变函数 $f(z_1, \cdots, z_n)$ 称为一阶解析,当且仅当对任何 $v(v = 1,2,\cdots,n)$ 均有

$$f(z_1, \cdots, z_n) = f_{v_1}(z_1, \cdots, \lambda_v, \cdots, z_n)e_{v_1} + f_{v_2}(z_1, \cdots, \mu_v, \cdots, z_n)e_{v_2}, \text{ 其中}$$

$$e_{v_1} = \frac{1}{2}(1 + j_v), e_{v_2} = \frac{1}{2}(1 - j_v), \lambda_v = x_v + y_v, \mu_v = x_v - y_v \quad (v = 1,2,\cdots,n)$$

因此,若 n 重双曲泛复变函数 $f(z_1, \cdots, z_n)$ 一阶解析,则 $f(z_1, \cdots, z_n)$ 可写成

$$f(z_1, \cdots, z_n) = \sum_{k_1=1}^{2}\sum_{k_2=1}^{2}\cdots\sum_{k_n=1}^{2} f_{k_1,k_2,\cdots,k_n}(l_{1,k_1}, l_{2,k_2}, \cdots, l_{n,k_n})(e_{1,k_1}, e_{2,k_2}, \cdots, e_{n,k_n}) \tag{9}$$

其中 $l_v k_v = \begin{cases} x_v + y_v & k_v = 1 \\ x_v - y_v & k_v = 2 \end{cases}, e_v, k_v = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + j_v) & k_v = 1 \\ \frac{1}{2}(1 - j_v) & k_v = 2 \end{cases} \quad v = 1,2,\cdots,n$

(3) 若 $f(z_1, \cdots, z_n)$ 对每一 z_v 都有二阶偏导数时,则称 $f(z_1, \cdots, z_n)$ 二阶解析.

1.1.3 多重双曲泛复变函数

(1) 在多重双曲泛复变函数论中,令

$$j_1 = j_2 = \cdots = j_n = j \tag{10}$$

则 $H^n = H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n = H \times H \times \cdots \times H = \{(z_1, \cdots, z_n) \mid z_v = x_v + jy \in H \quad v = 1,2,\cdots,n\}$ 称为 n 维双曲泛复空间.

(2) 由于(10),因此 $e_{v,k_v} = \begin{cases} e_1 & k_v = 1 \\ e_2 & k_v = 2 \end{cases} \quad v = 1,2,\cdots,n$, 于是 n 维双曲泛复变函数 $f(z_1, \cdots, z_n)$ 一阶解析时可展为

$$\begin{aligned} f(z_1, z_2, \cdots, z_n) &= \phi(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)e_1 + \varphi(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)e_2 \\ &= \frac{\phi(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) + \varphi(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)}{2} + j\frac{\phi(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) - \varphi(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)}{2} \end{aligned} \tag{11}$$

其中 $\lambda_v = x_v + y_v, \mu_v = x_v - y_v \quad (v = 1,2,\cdots,n)$

1.2 双曲抛物泛复变函数

(1) 满足示性方程 $j^2 - 1 = 0, k^2 = 0$

的非实域元 j, k 添加到实域 R 上形成如

$$z = \alpha + j\beta + kr + jk\delta \tag{12}$$

的双曲抛物泛复变函数,其全体记为 H_p, H_p 是一广域.

(2) 为下面的应用,只考虑(12)中 $\delta=0$ 的情形.泛复变量

$$z=\alpha+j\beta+kr \tag{13}$$

的泛复变函数

$$f(z)=P+jQ+kS+jkT \tag{14}$$

解析的充要条件是

$$P_\alpha=Q_\beta=S_\gamma,Q_\alpha=P_\beta=T_\gamma,S_\alpha=T_\beta,P_\gamma=0,T_\alpha=S_\beta,Q_\gamma=0 \tag{15}$$

(3) 可以证明,双曲抛物泛复变解析函数(14)在其解析区域内无穷可微.

1.3 双曲椭圆泛复变函数

(1) 满足示性方程 $j^2-1=0,i^2+1=0$ 的非实域元 j,i 添加到实域 R 上形成形如

$$z=\alpha+j\beta+(ir+ji\delta) \tag{16}$$

的双曲椭圆泛复变函数,其全体记为 H_c,H_c 是一广域.

(2) 为下面的应用,只考虑(16)中 $\delta=0$ 时的情形.复变量

$$z=\alpha+j\beta+ir \tag{17}$$

的泛复变函数

$$f(z)=P+jQ+iS+jiT \tag{18}$$

解析的充要条件是

$$P_\alpha=Q_\beta=S_\gamma,Q_\alpha=P_\beta=T_\gamma,S_\alpha=T_\beta=-P_\gamma,T_\alpha=S_\beta=-Q_\gamma \tag{19}$$

(3) 可以证明,双曲椭圆泛复变解析函数(18)在其解析区域内无穷可微.

2 $n+m$ 超双曲型偏微分方程的函数论方法

2.1 主要结果

$n+m$ 超双曲型偏微分方程(1)的特征方程是

$$v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2=v_{n+1}^2+v_{n+2}^2+\cdots+v_{n+m}^2 \tag{20}$$

由泛复变函数理论,将满足示性方程(20)的元基 $v_1,v_1,\cdots,v_n,v_{n+1},\cdots,v_{n+m}$ 添加到实数域 R 上形成任意正整数阶整基的一无限广域,称为超双曲广域,记为 $H_{yp}F$,$H_{yp}F$ 中任意形如

$$z=x_1v_1+x_2v_2+\cdots+x_nv_n+y_1v_{n+1}+\cdots+y_mv_{n+m} \tag{21}$$

任意泛复解析函数 $f(z)$ 是 $n+m$ 超双曲型方程(1)的特征泛复解.将 $f(z)$ 分蘖后,其任意分量均为(1)的实解析解.

我们仅对 $n+m$ 超双曲型方程(1)的实解析解感兴趣.由广域 $H_{yp}F$ 的无限微性质可知,泛复解析函数 $f(z)$ 的分蘖具由无限多项.再由示性方程(20)的特征,对 $f(z)$ 的分蘖有巨大的甚至是不可克服的困难.因此,我们将广域 $H_{yp}F$ 缩小成为有限维来求解.在有限维时,记为 $H_{ypt}F$.

2.1.1 单双曲泛复理论下的解

在有限维广域 $H_{ypt}F$ 上,可视 $v_1,v_2,\cdots,v_n,v_{n+1},\cdots,v_{n+m}$ 为一个基,其中 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 为 n 个实方向,$v_{n+1},\cdots,v_{n+m}$ 为 m 个双曲虚方向,令

$$v_1=\phi_1,v_2=\phi_2,\cdots,v_n=\phi_n,v_{n+1}=j\theta_1,v_{n+2}=j\theta_2,\cdots,v_{n+m}=j\theta_m \tag{22}$$

其中 j 满足 $j^2-1=0$ 是双曲虚单位;$\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_n,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$ 为 $n+m$ 个非零实参数,并且满足

$$\phi_1^2+\cdots+\phi_n^2=\theta_1^2+\cdots+\theta_m^2 \tag{23}$$

由(23)知,(22)满足特征方程(20).将(22)代入(21),得

$$z=(\phi_1x_1+\phi_2x_2+\cdots+\phi_nx_n+)+j(\theta_1y_1+\theta_2y_2+\cdots+\theta_my_m) \tag{24}$$

其解析函数是

$$f(z)=\frac{\Phi[(\phi_1x_1+\cdots+\phi_nx_n)+(\theta_1y_1+\cdots+\theta_my_m)]+\Psi[(\phi_1x_1+\cdots+\phi_nx_n)-(\theta_1y_1+\cdots+\theta_my_m)]}{2}$$
$$+j\frac{\Phi[(\phi_1x_1+\cdots+\phi_nx_n)+(\theta_1y_1+\cdots+\theta_my_m)]-\Psi[(\phi_1x_1+\cdots+\phi_nx_n)-(\theta_1y_1+\cdots+\theta_my_m)]}{2} \tag{25}$$

则二阶解析函数(25)的实部或虚部是在条件(20),(22),(23)下的实解.

2.1.2 双曲抛物理论下的解

我们仅讨论 $m > n$ 的情形.则方程(1)可写为

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \cdots + u_{x_nx_n} = u_{y_1y_1} + \cdots + u_{y_ny_n} + u_{y_{n+1}y_{n+1}} + \cdots + u_{y_my_m} \tag{26}$$

特征方程(20)可写为

$$v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 = v_{n+1}^2 + v_{n+2}^2 + \cdots + v_{n+n}^2 + v_{n+(n+1)}^2 + \cdots + v_{n+m}^2 \tag{27}$$

令

$$v_1 = \cdots = v_n = 1, v_{n+1} = \cdots = v_{n+n} = j, v_{n+(n+1)} = \cdots = v_{n+m} = k \tag{28}$$

则(28)满足特征方程(27).将(28)代入(21),得

$$z = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + j(y_1 + y_2 + \cdots + y_n) + k(j_{n+1} + \cdots + j_m) \tag{29}$$

其解析函数是(14),由(15)知,(29)的任意解析函数的实分量是方程(26)的实解析解.

2.1.3 双曲椭圆理论下的解

我们仅讨论 $m > n$,且 $m - n = 2t$ 时的情形.此时方程(1)可写为

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \cdots + u_{x_nx_n} = u_{y_1y_1} + \cdots + u_{y_ny_n} + u_{y_{n+1}y_{n+1}} + \cdots + u_{y_{n+t}y_{n+t}} + u_{y_{n+(t+1)}y_{n+(t+1)}} + \cdots + u_{y_{n+2t}y_{n+2t}} \tag{30}$$

特征方程(20)改写成

$$v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 = v_{n+1}^2 + \cdots + v_{n+n}^2 + v_{n+(n+1)}^2 + \cdots + v_{n+(n+t)}^2 + v_{n+(n+t+1)}^2 + \cdots + v_{n+(n+2t)}^2 \tag{31}$$

令

$$v_1 = \cdots = v_n = 1, v_{n+1} = \cdots = v_{n+n} = v_{n+(n+1)} = \cdots = v_{n+(n+t)} = j, v_{n+(n+t+1)} = \cdots = v_{n+n+2t} = i \tag{32}$$

则(32)满足示性方程(31),将(32)代入(21),得

$$z = (x_1 + \cdots + x_n) + j(y_1 + \cdots + y_n + y_{n+1} + \cdots + y_{n+t}) + i(y_{n+t+1} + \cdots + y_{n+2t}) \tag{33}$$

其解析函数是(18),由(19)知,(33)的任意解析函数(18)的任一分量是方程(30)的解析解.

2.2 $m = n$,且 $u_{x_ix_i} = u_{y_iy_i} (i = 1,2,\cdots,n)$ 情形下的解

2.2.1 多重泛复理论下的解

当 $m = n$ 时,$n + m$ 超双曲型方程(1)可写成

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \cdots + u_{x_nx_n} = u_{y_1y_1} + \cdots + u_{y_ny_n} \tag{34}$$

对于方程(34),若

$$u_{x_ix_i} = u_{y_iy_i} \qquad i = 1,2,\cdots,n \tag{35}$$

则方程(34)在条件(35)下与 n 重双曲泛复变解析函数一一对应.

2.2.2 多双曲泛复理论下的解

显然,n 维双曲泛复解析函数是 n 重双曲泛复解析函数的一种特殊情形,因而 n 维双曲泛复解析函数(11)是方程(34)在条件(35)下的特征泛复解.

参考文献:

[1] 熊锡金.泛复变函数在数学与物理中的应用[M].长春:东北师范大学出版社,1988.

[2] 濮德潜.重复变函数[J].数学研究与评论,1983,2:113~112.

[3] Fritz John. Partial Differential Equations[M].Forth Edition,Springer - Verlag New York Inc.1982.

[4] 谷超豪.偏微分方程概貌[M].北京:科学技术文献出版社,1989.