S半环的简单性质

陈世联[1]，施恩伟[2]

(1. 昆明理工大学 理学院，云南 昆明 650093; 2. 云南师范大学 数学系，云南 昆明 650092)

摘要：在文[1]的基础上，讨论了S半环的几个简单性质，这些结果对进一步研究S半环具有重要意义.

关键词：S半环；子半环；同余关系

中图分类号：O153.2 文献标识码：A 文章编号：1007-855X(2001)03-136-03

本文所涉及的半群都是指有单位元的半群，并称交换半群为加法半群.

定义1 一个代数系统 $\langle R,+,\bullet,0,1\rangle$ 叫做一个半环[1]，如果它满足：

(1) $\langle R,+,0\rangle$ 是加法半群，其中0是单位元；

(2) $\langle R,\bullet,1\rangle$ 是半群，其中1是单位元；

(3) $a\bullet(b+c)=a\bullet b+a\bullet c,\ (b+c)\bullet a=b\bullet a+c\bullet a,\ \forall a,b,c\in R$.

一般地，称“+”为半环 R 的加法运算，称“$\bullet$”为乘法运算，并记 $a\bullet b$ 为 ab. 约定，$a^n=a^{n-1}\bullet a$, n 是大于1的自然数.

若 $\forall a,b\in R$，有

$$ab=ba$$

则称半环 $\langle R,+,\bullet,0,1\rangle$ 是交换的.

元素1称为半环 R 的单位元，显然，R 的单位元是唯一的.

定义2 一个交换半环 R 叫做一个 S 半环，如果它满足：

(4) $a^2=a, 1+1+a=a$;

(5) $a+b(a+a+1)=a+b$; $\forall a,b\in R$, 1是 R 的单位元.

例 设 $R=\{a,b,c,d,e,f\}$，在 R 上定义加法“+”及乘法“$\bullet$”如下表：

+	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b	b	b	e	e	e
c	c	b	a	f	d	d
d	d	e	f	a	c	c
e	e	e	d	c	b	b
f	f	e	d	c	b	a

$\bullet$	a	b	c	d	e	f
a	a	b	a	a	b	a
b	b	b	b	b	b	b
c	a	b	c	a	b	c
d	a	b	c	d	d	d
e	b	b	b	d	e	e
f	a	b	c	d	e	f

收稿日期：2000-12-27.

第一作者简介：陈世联(1964.3～)，男，副教授；主要研究方向：决策分析，灰色系统.

容易验证, $\langle R,+,\bullet,a,f\rangle$ 是 S 半环，其中 a 是加法半群的单位元，f 是 R 的单位元.

定义 3　设 $R=\langle R,+,\bullet,0,1\rangle$ 是 S 半环，若 $Q\subset R$ ，而且 $\langle Q,+,\bullet,0,1\rangle$ 是 S 半环，则称 Q 为 R 的 S 子半环，其中 Q 上的运算是 R 上的运算在 Q 上的限制.

设 R 是 S 半环, $\forall a\in R$ ，记

$$R(a)=\{x\mid x\in R,a(x+x+1)=a\}$$

性质 1　设 $R=\langle R,+,\bullet,0,1\rangle$ 是 S 半环，则 $\forall a\in R,R$ 具有如下性质：

(1)　$R(a)=R(1+a)$;

(2)　$a+b+b=a$ 当且仅当 $b\in R(a)$;

(3)　$R(1)\subset R(a)$;

(4)　$\langle R(a),+,\bullet,0,1\rangle$ 是 R 的 S 子半环.

证明 (1)　设 $b\in R(a)$ ，则有 $a(1+b+b)=a$. 于是

$$\begin{aligned}(1+a)(1+b+b)&=1+a+(1+a)(b+b)=1+a+b+b+ab+ab=1+a+b(1+1+a+a)\\&=1+a+b(a+a)=1+a(1+b+b)=1+a\end{aligned}$$

所以, $b\in R(1+a)$ ，因而有 $R(a)\subset R(1+a)$.

反之，设 $b\in R(1+a)$ ，则有

$$(1+a)(1+b+b)=1+a$$

于是

$$1+a=(1+a)(1+b+b)=1+a+b+b+ab+ab$$

所以

$$1+(1+a)=1+(1+a+b+b+ab+ab)$$

由定义(2)中的(4)，可得

$$a=a+b+b+ab+ab=a+b(1+1+a+a)=a+b(a+a)=a(1+b+b)$$

所以, $b\in R(a)$ 从而有 $R(1+a)\subset R(a)$.

综上可知, $R(a)=R(1+a)$.

性质(2)～(4)可类似证明.

性质 2　设 $R=\langle R,+,\bullet,0,1\rangle$ 是 S 半环，在 $R(1)$ 上定义运算 $\vee,\wedge$ 及 $'$ 如下：

$$a\vee b=a+b+ab$$
$$a\wedge b=ab$$
$$a'=1+a$$

则 $\langle R(1),\vee,\wedge,',0,1\rangle$ 是布尔代数[2].

设 R 是 S 半环，$Q \subset R$，称 Q 是 R 的理想[3]，如果

(1) Q 是 R 的 S 子半环；

(2) $\forall a \in R$ 及 $\forall q \in Q$，有 $aq \in Q$.

设 R 是 S 半环，Q 是 R 的理想，在 R 上定义二元关系"～"为

$a \sim b$ 当且仅当存在 $m, m' \in Q$，使得等式

$$a + m = b + m'$$

成立.

性质3 二元关系～是 R 上的同余关系.

证明从略.

设～是 R 上的一个同余关系，用 $a/\sim$ 表示元素 a 所在的等价类，并规定

$$a/\sim + b/\sim = a + b/\sim$$
$$a/\sim \bullet b/\sim = ab/\sim$$

记 $R/\sim = \{a/\sim \mid a \in R\}$，则有

性质4 设 $\langle R, +, \bullet, 0, 1\rangle$ 是 S 半环，～是 R 上的一个同余关系，则

$$\langle R/\sim, +, \bullet, 0/\sim, 1/\sim\rangle$$

是 S 半环.

证明从略.

参考文献:

[1] 施恩伟. S半环与Stone定理的推广[J]. 数学研究与评论, 2000, 20(3): 434～436.

[2] 陈世联, 施恩伟. Near Boolean 代数的几个性质[J]. 昆明理工大学学报, 1997, 22(6): 16～17.

[3] Sen M E, Adhikari M R. On maximal K-ideals of Semirings[J]. Proc Amer Math Soc, 1993, 118: 699～703.

S-emirings and Its Properties

CHEN Shi-lian[1], SHI En-wei[2]

(1. The Faculty of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, China;

2. Dept of Mathenatics, Yunnan Normal University, Kunming 650092, China)

Abstract: The properties of S-semirings are discussed. These results are important for S-semirings.

Key words: S-semirings; subsemiring; Congruent relation